Corrigé de l'exercice 1.

1. **a.** $(4;4;5)$ est le seul qui réponde à la définition.
On trace un segment $[BC]$ de longueur 5. Le cercle de centre B de rayon 4 coupe la médiatrice de $[BC]$ en deux points. A est l'un d'eux.

b. En appliquant la définition $19 \leqslant z \leqslant 33$.

c. C'est l'inégalité stricte qui manque $z < x + y$: une fois déclaré le plus grand, le fait que la longueur de chaque côté soit inférieure à la somme des longueurs des deux autres est acquis.

2. **a.** Comme $z < x + y$, $x + y + z > 2z$. Il s'ensuit que $z \leqslant 8$. La plus petite valeur de z est celle pour laquelle les trois côtés sont de même longueur, 6.

b. Pour énumérer les éléments de E_{18}, on tient compte du fait que les deux plus petits côtés ont des longueurs x et y telles que $x + y > 9$. On obtient :

$$E_{18} = \{(2;8;8),(3;7;8),(4;6;8),(5;5;8),(4;7;7),(5;6;7),(6;6;6)\}.$$

Le triangle est représenté sur la figure 1.

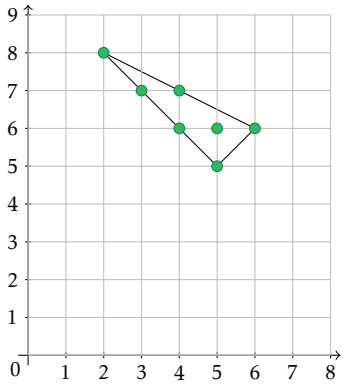

FIGURE 1: *Les points de* E_{18}

3. **a.** L'inégalité est transportée lorsqu'on ajoute 1 au plus petit membre et 2 au plus grand, la somme est la bonne.

b. Pour que le triplet $(x-1\,;y-1\,;z-1)$ appartienne à E_{p-3}, il faut que $z-1 < x-1+y-1$, c'est-à-dire $z < x+y-1$ Comme on a affaire à des entiers vérifiant $z < x+y$, il suffit que $z \neq x+y$ et que $x \neq 1$ d'autre part pour que le nouveau triangle en soit un.

c. Si p est impair, l'égalité $x-1+y-1 = z-1$ est impossible, attendu que $x-1+y-1+z-1$ doit être pair.
Il n'y a pas de triplet $(1\,;y\,;z)$ dans E_{p+3}, car $1+y+z = p+3$ et $z < y+1$ conduisent à $p+3 < 2y+1$, ou $p+2 < 2y$, ce qui fait de y la plus grande longueur à égalité avec z, mais $y+z$ est impair, puisque $p+3$ est pair.
Les deux ensembles ont le même nombre d'éléments

4. Étude de E_{2019}.

a. Oui, car $2019 = 3 \times 673$.

b. Deux sortes de triangles isocèles sont *a priori* possibles : ceux dont les côtés égaux ont la plus petite longueur et ceux dont les côtés égaux ont la plus grande. Les triplets $(x\,;x\,;z)$ tels que $2x+z=2019$ et $z>x$ vérifient car $3x<2019<4x$, car $z<2x$. On a donc $x \in \{505, 506, \ldots, 672\}$.

Les triplets $(x\,;z\,;z)$ tels que $x+2z=2019$ vérifient $674<z<1009$ et donc $z \in \{675, 676, \ldots, 1008, 1009\}$.

Il y a en tout $168+335=503$ triangles isocèles non équilatéraux dans E_{2019}.

c. Le triplet correspond à un triangle rectangle de périmètre 2019 si $x^2+y^2=z^2$ et $x+y+z=2019$. On a donc :

$$\begin{aligned}
2019^2 &= x^2+y^2+z^2+2(x+y)z+2xy \\
&= x^2+y^2+z^2+2(x+y)(2019-x-y)+2xy \\
&= x^2+y^2+z^2+4038(x+y)-2(x+y)^2+2xy \\
&= x^2+y^2+z^2+4038(x+y)-2x^2-4xy-2y^2+2xy \\
&= 4038(x+y)-2xy
\end{aligned}$$

Mais ce dernier nombre est pair. Donc le problème n'a pas de solution.

5. **a.** Ces conditions sont celles données dans la définition.

b. La somme des trois longueurs vaut bien 2022, les deux conditions imposent $2022-x-y \geqslant y$, donc $2022-x-y>0$, et $2002>y+1012$ qui donne l'ordre.

c. Le triangle — appelé ici ABC par commodité — est reproduit sur la figure 2. L'angle droit est à l'intersection des droites de pentes 1 et -1. Les points à coordonnées entières de la droite d'équation $y=x$ sont les points d'abscisse entière comprise entre l'abscisse de A (506) et celle de B (674). Les points à coordonnées entières sur le côté AC d'équation $y=1012-x$ sont aussi ceux dont l'abscisse est entière supérieure ou égale à 2 et inférieure ou égale à 506. Les points à coordonnées entières sur le côté BC sont aussi ceux dont l'abscisse est paire (l'équation de la droite est $y=1011-\dfrac{x}{2}$) et comprise entre 2 et 674. L'aire du triangle rectangle est 84672 (demi-produit des longueurs des cathètes [1]).

d. On utilise la formule de Pick pour trouver le nombre de points intérieurs à partir de l'aire et du nombre de points sur le périmètre (attention à ne pas compter A, B et C deux fois). Il y a 169 points entre A et B ; 505 entre A et C ; 337 entre B et C. Il y a donc $168+505+337-3=1008$ points sur les côtés de ABC.

Il y a alors, d'après la formule de Pick, $84672-\dfrac{1008}{2}+1=84169$ points à l'intérieur de ABC.

1. Côtés de L'angle droit dans un triangle rectangle.

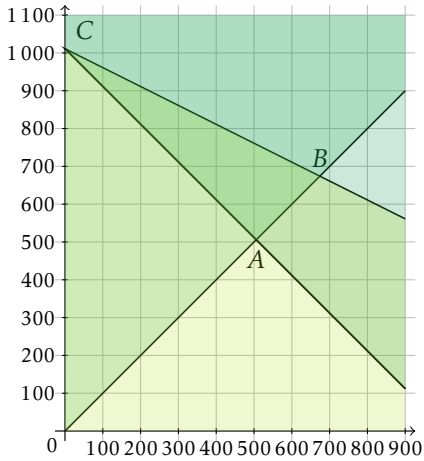

FIGURE 2: *Construction du triangle ABC*

Il y a donc $84\,169 + 1\,008 = 85\,177$ triplets dans E_{2022}, nombre qui est le même d'après la question 3 que le nombre de triplets dans E_{2019}.

6. Une solution algorithmique

Le programme doit permettre de faire la liste des triplets d'entiers x, y, z pour lesquels $x + y + z = p$, $x + y > p$, et $x \leqslant y \leqslant z$. On commencera par déterminer les valeurs extrêmes de z, ce qui nécessite d'étudier la parité et la divisibilité par 3 de p. On distinguera 6 cas (voir le tableau 1).

Il existe un entier q tel que	Valeur maximale de z	Valeur minimale de z
$p = 6q$	$3q - 1$	$2q$
$p = 6q - 1$	$3q - 1$	$2q - 1$
$p = 6q - 2$	$3q - 2$	$2q - 1$
$p = 6q - 3$	$3q - 2$	$2q - 1$
$p = 6q - 4$	$3q - 3$	$2q - 2$
$p = 6q - 5$	$3q - 3$	$2q - 2$

TABLE 1: *Les différents cas*

Une fois déterminés ce minimum et ce maximum, on programme une boucle de z_{min} à z_{max}. Dans cette boucle, à chaque valeur de z sont associées successivement les valeurs de y allant de 1 à z. À chacune des valeurs de correspond au maximum une seule valeur de x telle que $x + y + z = p$. Si cette valeur vérifie $x \leqslant y \leqslant z$ et $x + y > z$, elle est acceptée, sinon on passe à $x + 1$.

Autre déroulé : on peut aussi utiliser une boucle For sur la plus petite des longueurs, x, et à chaque tour de boucle boucler sur y.

On donne ici deux programmes python, de la recherche du nombre d'éléments dans E_{2019}.

Nombres d'éléments dans E_{2019}

```
def searchTriplet(p):
    """ recherche les triplets entiers (x,y,z)
    tel que x+y+z = p et (x,y,z) un triangle.  Version "naive"
    """
    resultat = []
    for z in range(1,p+1):
        for y in range(1,z+1):
        x = p - y - z
        if x <= y and y <= z and z < x+y and x < z+y and y < z +x :
        resultat.append((x,y,z))
    return resultat


def searchTriplet2(p):
    """
    On cherche à faire plus rapide que le
    searchTriplet
    """
    if p % 6 == 0 :
        q = p // 6 zmin = 2*q zmax = 3*q-1
    if p % 6 == 5 :
        q = (p+1) // 6 zmin = 2*q-1 zmax = 3*q-1
    if p % 6 == 4 :
        q = (p+2) // 6 zmin = 2*q-2 zmax = 3*q-2
    if p % 6 == 3 :
        q = (p+3) // 6 zmin = 2*q - 2 zmax = 3*q - 2
    if p % 6 == 2 :
        q = (p+4) // 6 zmin = 2*q-2 zmax = 3*q - 3
    if p % 6 == 1 :
        q = (p+5) // 6 zmin = 2*q-2 zmax = 3*q-3
    resultat = []
    for z in range(zmin,zmax+1):
        for y in range(1,z+1):
        x = p - y - z
        # print(x,y,z,x+y,x+y+z, c1 , c2)
        if x <= y and y <= z and z < x+y :
            resultat.append((x,y,z))

    return resultat

    print("Version lente") print(len(searchTriplet(2019)))
    print("Version rapide") print(len(searchTriplet2(2019)))
```

Dans les deux cas la réponse fournit est : 85 177

Corrigé de l'exercice 2.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels

1. La propriété 3 permet d'écrite $\Delta(p^2) = p\Delta(p) + p\Delta(p) = 2p\Delta(p) = 2p$, car $\Delta(p) = 1$ d'après la propriété 2.
$\Delta(p^3) = p^2\Delta(p) + p\Delta(p^2) = p^2 + p \times 2p = 3p^2$.
On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n+1}$, pour une certaine valeur de n.
$\Delta(p^{n+1}) = p^n\Delta(p) + p\Delta(p^n) = p^n + p \times np^{n-1} = (n+1)p^n$.

2. **a.** $\Delta(p^m \times q^n) = q^n\Delta(p^m) + p^m\Delta(q^n) = mq^np^{m-1} + np^mq^{n-1} = p^{m-1}q^{n-1}(np+mq)$.

b. En appliquant la question précédente avec $p = 2$, $q = 5$ et $n = m$, on obtient : $\Delta(10^n) = 2^{n-1} \times 5^{n-1}(2n+5n) = 7n2^{n-1} \times 5^{n-1}$. On en déduit que $\Delta(10^n)$ est toujours un multiple de 7, pour $n \geqslant 1$.

3. **a.** On a $n = p_1^{a_1} N$ avec $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$

$\Delta(n) = N\Delta(p_1^{\alpha_1}) + p_1^{\alpha_1}\Delta(N) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} N + p_1^{\alpha_1}\Delta(N) = \alpha_1 q_1 + p_2\Delta(N)$. On recommence avec N, qui possède moins de facteurs premiers. On en déduit que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$$

b. Pour la propriété (2), on a $n = p$, donc $a_1 = 1$ et $q_1 = 1$ donc $\Delta(n) = 1$.

Pour la propriété (3), on rajoute les nombres premiers non présents dans a et dans b, ce qui ne sont pas présents, auront des exposants nuls. On a alors $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ et $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots p_k^{\beta_k}$. On a alors $\Delta(a) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_k q_k$ et $\Delta(b) = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \cdots + \beta_k r_k$.

Alors, $a\Delta(b) + b\Delta(b)$ contient des termes de la forme $a\alpha_i q_i + b\beta r_i$. Or $aq_i = bp_i$ car se sont deux manières d'exprimer le quotient de ab par p_i. On a donc, $a\alpha_i q_i + b\beta r_i = (\alpha_i + \beta_i)s_i$, avec s_i le quotient de ab par p_i et $(\alpha_i + \beta_i)$ l'exposant de p_i dans ab. La propriété (3) est donc bien vérifiée.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ

4. **a.**
- $12 = 2^2 \times 3$, donc $\Delta(12) = 2 \times 6 + 1 \times 4 = 16$.
- $56 = 2^3 \times 7$, donc $\Delta(56) = 3 \times 28 + 1 \times 8 = 92$.
- $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$ donc $\Delta(1001) = 1 \times 143 + 1 \times 91 + 1 \times 77 = 311$.

b. Pour $n \geqslant 2$, $\Delta(n)$ est une somme d'entier positif, donc est non nulle. Les seules solutions sont donc 0 et 1.

c. Tous les nombres premiers p vérifient $\Delta(p) = 1$. Si p est composé, la formule qui donne $\Delta(p)$ est une somme d'entier positif. Pour qu'elle soit égale à 1, il faudrait que tous les termes soient nuls sauf 1, et le produit de deux entiers n'égal à 1 que si les deux facteurs sont 1, ce qui n'est pas possible.

Donc, les solutions de $\Delta(x) = 1$ sont les nombres premiers.

d. 2 n'a pas d'antécédent par Δ, car il faudrait deux termes égaux à 1, ce qui n'est pas possible, ou un terme égal à 2. Mais dans ce cas là, un deuxième 2 apparaît.

e. $\Delta(n) \leqslant n$ n'est pas toujours, comme le prouve la question 4a.

5. **a.** $\Delta(p \times q) = q\Delta(p) + p\Delta(q) = p + q$.

b. $\Delta(12) = 16$, et $12 = 4 \times 3$. On a bien $\Delta(a \times b)! = a + b$.

6. **a.** $\Delta(56) = 92$, et $56 = 49 + 7$, or $\Delta(49) = 14$ et $\Delta(7) = 1$. Donc $\Delta(a + b)! = \Delta(a) + \Delta(b)$.

b. On a :

$$\begin{aligned}\Delta(ka + kb) &= \Delta(k(a + b)) = \\ &= k\Delta(a + b) + (a + b)\Delta(k) \\ &= k\Delta(a) + k\Delta(b) + a\Delta(k) + b\Delta(k) \\ &= \Delta(ka) + \Delta(kb)\end{aligned}$$

Les points fixes de la fonction

7. **a.** $m = kp^p$, $\Delta(m) = k\Delta(p^p) + p^p\Delta(k) = kpp^{p-1} + p^p\Delta(k) = p^p(k + \Delta(k))$. Donc, $\Delta(m)$ est un multiple de p^p.

b. n est de la forme $n = p^\alpha p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

$\Delta(n) = \alpha q + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_k$, avec q un multiple de $p^{\alpha-1}$ et q_i un multiple de p^α. On peut donc factoriser $\Delta(n)$ par $p^{\alpha-1}$. $\Delta(n) = p^{\alpha-1}\left(\alpha q' + \alpha_2 q_2' + \cdots + \alpha_k q_k'\right)$. Comme $\alpha < p$, on ne peut pas dans le deuxième facteur mettre p en facteur. On en déduit que $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteur premier de $\Delta(n)$.

8. p^p est solution de l'équation. Maintenant, si x est un entier, soit il existe un entier premier p dans la décomposition de x tel que $\alpha < p$, alors la question précédente assure que x n'est pas solution de l'équation. Maintenant si tous les facteurs premiers p_i ont des exposants α_i vérifiant $p_i < \alpha_i$, le même argument que précédemment assure que x n'est pas solution de l'équation.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Ce sont les mots qui ne contiennent pas de lettre A.

Traitement de texte

2. On obtient le mot : AGADADAGA, puis (en ajoutant des espaces qui facilitent la lecture).

AGADADAGA G AGADADAGA D AGADADAGA D AGADADAGA G AGADADAGA .

3. À chaque remplacement d'un A, on a 5 nouveau A. Le nombre de A est donc multiplié par 5 à chaque exécution. On a donc une suite géométrique de raison 5 et de premier terme 1. On cherche donc n tel que $5^n > 10^9$. Une recherche exhaustive donne donc $n = 13$.

4. À chaque étape, on a le double des A présents à l'étape précédente, plus les D présents à l'étape précédente.

On note d_n le nombre de D et a_n le nombre de A à l'étape n. On a $d_1 = 0$ et $a_1 = 0$.

Alors $d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + d_{n-2} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + 2$. Il faut donc faire la somme d'une suite géométrique de raison 5 et de premier terme 1, puis doubler le résultat.

$$d_n = 2\frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{2}.$$

Pour $n = 20$, cela donne 47 683 715 820 312 lettres D.

Motif

5. Le mot obtenu par Astrid était : ADADAGA.

6. On obtient le motif de la figure 3.

7. Elle a pris comme motif de remplacement : ADAGAGAADADAGA.

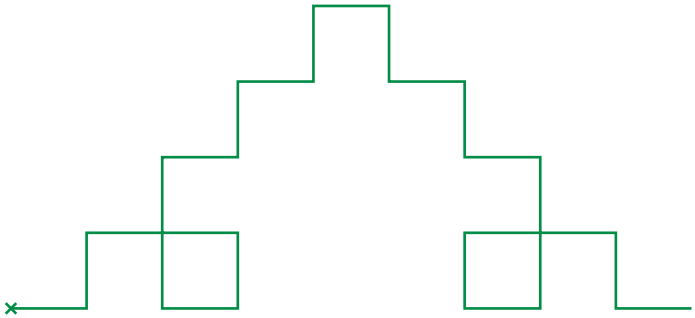

Figure 3: *Motif obtenu en partant de A et en exécutant deux fois le programme.*

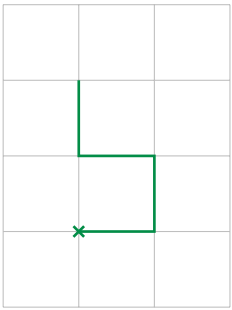

Figure 4: *Motif obtenu à partir de AGAGADA*

8. **a.** On obtient la figure 4. Elle est de largeur 1.

b. La figure 5 montre la figure de longueur 1 qui est la plus petite possible, obtenue avec le mot AGAGAGAGAGAGAGAGAGAGAGADADADADADADADADADADADADA, et deux motifs de longueur maximum 11, respectivement AGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGA et AGADAGADAGADAGADAGADAGADAGADAGADAGADAGADAGADA.

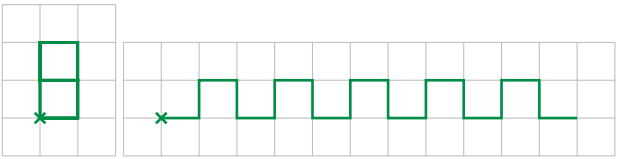

Figure 5: *Motifs obtenus avec* 10 *GA et* 10 *DA*

Si en partant de AGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGA, on remplace les 6 dernières lettres par GADADA, on diminue la longueur de 1.

En partant toujours du même motif, mais en remplaçant les 12 dernières lettres par GADADAGADADA, on obtient un motif de longueur 7. En continuant, ainsi on obtiendrait les motifs de longueur 5, 3 et 1.

En considérant les groupes de 4 lettres, après le premier A, on a GADA ou DAGA qui augmentent la longueur du motif de 1 et GAGA et DADA qui diminuent la longueur de 1. La longueur du motif ne peut donc pas être paire.

On peut aussi penser à une énumération complète de tous les motifs (184 756) et de faire calculer la longueur de chaque motif. Tous les motifs ont une longueur impaire.