Baccalauréat C Mexico janvier 1967
Mathématiques et mathématiques et technique

I.

1. α étant un arc compris entre 0 et π (unité : le radian), on donne

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

   Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$.
   En déduire α.

2. x étant compris entre 0 et 2π, résoudre l'inéquation

$$\sqrt{3+2\cos x} > 2\sin x.$$

II.

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on considère la transformation ponctuelle S qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& -\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ y' &=& \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{y}{2}.\end{array}\right.$$

1. Montrer que cette transformation est involutive.
2. Déterminer l'ensemble, (Δ), des points doubles, ainsi que l'ensemble des points I, milieux de MM'.
3. Montrer que MM' reste parallèle à une direction fixe, que l'on comparera à la direction de (Δ).
4. Déduire de ce qui précède que S est une transformation ponctuelle simple, que l'on définira géométriquement.
5. Tracer la courbe (Γ) ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation

$$y = x\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{x}.$$

   Quelle est la transformée de (Γ) par S?

Partie B

On considère maintenant la transformation T qui, au point $M(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'(x'\ ;\ y')$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\\ y' &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\end{array}\right.$$

1. Montrer que T a un seul point double, dont on calculera les coordonnées.
2. Comparer les longueurs de OM et de OM'.
3. θ étant un nombre réel, quel est le transformé du point M de coordonnées $(\sin\theta\ ;\ \cos\theta)$?
4. Déduire de ce qui précède que S est un déplacement, que l'on caractérisera.

Partie C

Par des considérations géométriques, déterminer les transformations composées $S \circ T$ et $T \circ S$.