Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier septembre 1971

EXERCICE 1

On désigne par $g \circ f$ la fonction composée des fonctions f et g qui, à tout x réel, associe

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

On note $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3, \ldots, f^{n-1} \circ f = f^n$.
Soit f la fonction affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = ax + b.$$

Déterminer $f^2, f^3, \ldots, f^n$ en calculant $f^2(x), f^3(x)$, puis $f^n(x)$ par récurrence.
Réciproquement, soit la fonction affine h telle que

$$h(x) = \alpha x + \beta.$$

Déterminer une fonction affine f telle que $f^n = h$.
Discuter.
N.-B. - Les lettres a, b, α et β désignant des nombres réels.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 2 et les transformations ponctuelles suivantes :

H_1 : homothétie de centre A et de rapport 2,
H_2 : homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$,
R : rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

1. Quelle est la nature de la transformation

$$H_2 \circ R \circ H_1 ?$$

2. Quelle est la nature de la transformation

$$H_2 \circ R \circ R \circ H_1 ?$$

(On rappelle que la notation $T_2 \circ T_1$ désigne le produit des transformations T_1 et T_2 la transformation T_1 étant effectuée la première.)
On donnera les caractéristiques géométriques de ces transformations.

PROBLÈME

Soit f la fonction numérique de la variable réelle qui à x fait correspondre

$$f(x) = x + \mathrm{Log}\left(x^2 - 1\right)$$

(Log désigne le logarithme népérien), et soit (Γ) sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.

Partie A

1. Déterminer le domaine de définition de f, puis le comportement de $f(x)$ aux bornes de ce domaine de définition. Quand x tend vers $-\infty$, on pourra montrer d'abord que

$$\text{Log}\left(x^2-1\right) = 2\text{Log}\,|x| + \text{Log}\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

puis mettre $f(x)$ sous la forme $xg(x)$.

2. Dresser le tableau des variations de $f(x)$. Donner sur la copie tout calcul numérique utile. Indiquer le procédé utilisé (règle, table).

Construire (Γ).

Partie B

1. Soit la droite (D) d'équation $y = x + h$.

Montrer que, quel que soit h, (D) coupe (Γ) en deux points M et M' ; donner leurs coordonnées.

En déduire une transformation ponctuelle dans laquelle (Γ) est globalement invariante.

Soit (T) la tangente en M, $\left(T'\right)$ la tangente en M' à (Γ). Montrer que le point I intersection de (T) avec (T') est sur $y'\text{O}y$.

2. Calculer en fonction de h l'aire (Σ) du triangle IMM'. Calculer le minimum de (Σ) quand h varie.

On demande enfin de calculer

$$\int \left[x + \text{Log}\left(x^2-1\right)\right]\,\text{d}x$$

lorsque x appartient à l'intervalle $]+1\;;\;+\infty[$.

On pourra, pour cela, calculer la dérivée de

$$x - \text{Log}\,(x+1)$$

et celle de $x\text{Log}\,(x+1)$, afin d'en déduire

$$\int \text{Log}\,(x+1)\,\text{d}x,$$

et procéder de même pour obtenir

$$\int \text{Log}\,(x-1)\,\text{d}x.$$