Bulletin de l'Association

des

Professeurs de Mathématiques

de l'Enseignement Secondaire Public

Paraissant tous les trimestres

SOMMAIRE

ADMINISTRATION

17, rue Louis-Braille, PARIS (XIIe)

Abonnement d'un an :	France,	**5** fr	–	Étranger,	**7** fr **50**
Prix d'un numéro :	–	**1** fr	–	–	**1** fr **50**

Membres d'Honneur :

MM. BLUTEL, Inspecteur général.
FONTENÉ, Inspecteur général honoraire.
LECONTE, Inspecteur d'Académie.
MARIJON, Inspecteur général.

Bureau :

Président :	M. BIOCHE, 56, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris 6^{e}.
Vice-Présidents :	Mme FICQUET, 2, rue Théophile-Gauthier, Paris 16^{e}.
	M. LEMAIRE, 18, rue Eugène-Manuel, Paris 16^{e}.
Secrétaires :	M. DELCOURT, 17, rue Louis-Braille, Paris 12^{e}.
	Mlle DETCHEBARNE, 13, rue Gay-Lussac, Paris 5^{e}.
Trésorier :	M. JULIEN, 11, rue des Marronniers, Paris 16^{e}.

Le bureau se réunit tous les troisièmes mercredis.

Comité :

Membres de droit :

MM. GRÉVY, St-Louis & BONIN, St-Germain-en Laye

Membres élus :

Mlle	CARTAN, Sèvres	MM ;	LESCOURGUES, Henr-IV
MM.	COMBET, Louis-le-Grand		MEUNIER, St-Germain-en-Laye
	COMMANAY, Compiègne	Mme	MOSSÉ, Lille
	COMMISSAIRE, Charlemagne	MM.	POUTHIER, Voltaire.
	GILLANT, Boulogne-sur-Mer		SAINTE-LAGUË, Janson.
	GROS, Condorcet		VIEILLEFOND, St-Louis.
	JACQUET, Henri IV	Mme	VIMEUX, Victor-Hugo

Correspondants :

Aix-Marseille :	M. FONT	*Lille :*	M. CHATRY.
Alger :	M. PERFETTI	*Lyon :*	…
Tunis :	M. PATOU	*Montpellier :*	M. DESBATS
Besançon :	M. DURAND (Ch)	*Nancy :*	M. CHANZY
Bordeaux :	…	*Poitiers :*	M. DREYFUS
Caen :	M. HENNEQUIN	*Rennes :*	…
Clermont :	M. SANSELME	*Nantes :*	M. DESFORGES
Dijon :	…	*Strasbourg :*	…
Grenoble : …	*Toulouse :*	M. CHENEVRIER	

PREMIÈRE PARTIE

I. COMMUNICATIONS IMPORTANTES

1. RECTIFICATIONS

Bulletin n° 22, page 18 : faire suivre de la mention « E.N.S. » les noms de MM. PERRICHET, MARTENOT, EYBERT et HUBSCHWERLIN.

Bulletin n° 19, page 23 : lire « CHOLET (C.J.F.). – Mlle Pommier », au lieu de « Paumier », et rectifier en conséquence le Répertoire du Bulletin n° 22.

Bulletin n° 20, page 35 : lire « VALENCIENNES. – M. Singier », au lieu de « Guigier », et rectifier en conséquence le Répertoire du Bulletin n° 22.

Bulletin n° 20, page 35 : à VALENCE, rayer M. Briolat.

2. PAIEMENTS DES COTISATIONS

Les membres de l'Asociation qui n'ont pas encore versé leur cotisation (5 francs à verser en octobre, art. 4 des statuts), sont instamment priés de les adresser au trésorier, individuellement ou – de préférence – par établissement, à l'aide d'un chèque postal (frais d'envoi : 0 fr. 15) en utilisant exactement l'adresse suivante, sans aucune addition :

Paris, C/c 345.95 – M. JULIEN 11, rue des Marronniers, XVI^{e}

Prière de bien vouloir signaler aussi, pour faciliter le travail des Secrétaires, les **mutations** (nouveaux et anciens postes, mises à la retraite, ...) des professeurs de mathématiques, la publication du *Bulletin administratif* étant suspendue.

3. PROCHAINES ÉLECTIONS AU COMITÉ

L'Assemblée générale de Pâques 1922 sera appelée à élire 5 membres au Comité, en remplacement de Mme FICQUET et de MM. COMMANAY, GILLANT, GROS et SAINTE-LAGUE, non immédiatement tééligibles (art. 9 des statuts).

Afin d'éviter une trop grande dispersion des suffrages, il semble désirable de présenter au choix des électeurs – *qui conservent d'ailleurs leur entière liberté* – une liste de membres de l'Association acceptant de mettre leur activité et leur dévouement au service de l'Association.

Les membres de l'Association désireux soit de poser leur candidature, soit de provoquer la candidature d'autres collègues, sont priés d'en informer le Bureau.

II. ÉTAT DE L'ASSOCIATION

(509 membres au 30 novembre 1921)

1. INSCRIPTIONS

AMIEL, Aix.
BERTRAND, Marseille.
CAILLET, Marseille.
CHAUMEIL, Cognac (C.).
CRETON (Mlle), Béthune. (C.F.)
DESOUCHES, Marseille.
FLAMANT (Mme), Strasbourg. (F.)
FOUYÉ, Orléans.
FRIZAC, Marseille.
GRÜNDLER, Tunis.
GUADET, Versailles.
HAIS, Tunis.
HENRY, Lyon-*Ampère*.
JACQUEMIN (Mlle), St-Étienne (F.).
JANIS, Marseille.
KÜSS (Mlle), Strasbourg.
LALANDE, Tunis
MALNOY, Orléans.
MAROGER, Marseille.
MARTIN (...), Marseille.
MIRANTE-PÉRÉ, Bayonne.
MOREL (G), La Flèche.
MOULIN (Mlle), Valenciennes (F.)
NADAL, Cognac (C.).
OLLIVIER (Mme), Strasbourg. (F.).
PAPELIER, Orléans.
PAU, Mâcon.
POËTTE, Arras (C.).
RIEUMAJOU, Cherbourg.
ROCHE, Marseille.
TERRIER, Aix.
TUTENUIT, Oran.
VINCIGUERRA, Ajaccio (C.).
VUILLARD, La Flèche.

2. RADIATIONS

MM. BRÉVILLE, Caen, *décéde.*
DUPUI, Tarbes, *démissionnaire.*
GOBERT, Toul (C.)., *décédé.*
GUILLET, Paris-Charlemagne, *décédé.*
Mme NADAL, Rouen (F.), *en congé.*
M. VACON, Bar-le-duc, *décédé*

3. COTISATIONS REÇUES DU 1ER OCTOBRE AU 30 NOVEMBRE

(*Cotisations 1921-1922 : 1re liste*)

En retraite : M. Goulin, *Professeur honoraire au lycée Condorcet.*
M. Mounier, *Professeur honoraire au lycée de Bayonne.*

ABBEVILLE (C.). – MM. Desjardin, Lehnebach
AIX-EN-PROVENCE – MM. Amiel, Bernard, Terrier.
AJACCIO (C.). – MM. Baud, Vinciguerra.
ALAIS. – M. Clapier.
ARRAS (C.). – MM ; Guillerme, Poëtte.
AUCH. – MM. Baillon, Baurens.
BAYONNE. – MM. Clément (T.), Giobia, Mirante-Péré.
BÉTHUNE (C.). – Mlle Thiesset.
BÉTHUNE (C.F.). – Mlle Creton.
BÉZIERS (C.). – MM. Maury, Valez, Vigné.
BLOIS (C.). – M. Dirou.
CAEN (F.). – Mlles de Curel, Létondot.
CASTELSARRAZIN (C.). – M. Pédebucq.
CHATEAUROUX. – M. Richard (J.).
CHERBOURG. – MM. Decerf, Rieumajou.
CLERMONT-FERRAND (F.). – Mlle Pommier.
COGNAC (C.). – MM. Chaumeil, Nadal.
DIJON. – MM. Coulon, Fleuchot, Lebel, Renaud.
DIJON (F.). – Mlle Dionot.
EMBRUN (C.). – M. Reynaud (A.).
EPERNAY (C.). – M. Vazou.
EPINAL (Lycée). – MM. Clément (...), Cunin, Médy.
EVREUX. – MM. Cazes, Davy, Mouchette.
EVREUX (C.F.). – Mlle Baudry.
LA FLÈCHE. – MM. Bellon, Fraceschini, Lagorse, Leger, Morel (G.), Navel, Taratte, Vallet, Vuillard.
LA ROCHELLE. – MM. Lesgourgues (L.), Vénencie.
LA ROCHELLE (C.F.). – Mlle Durbec.
LE HAVRE – MM. Delens, Deschamps, Sauvage.
LE HAVRE (F.). – Mlle Bertrand.
LE MANS (F.). – Mlle Filon.
LONS-LE-SAUNIER (F.). – Mlle Poncey.
LYON, *Ampère*. – M. Henry.
MÂCON – Dupeyrat,Genre, Pau.
MARSEILLE. – MM. Bertrand, Caillet, Desouches, Font, Frizac, Janis, Maroger, Martin (...), Roche.
METZ. – MM. Armbruster, Bellocq (D.), Cordier, Dauphin, Deperrois, Génin, Kieffer, Martin (M.), Pallez.

MONTLUÇON. – M. Chambonnet.
MULHOUSE. – MM. Eyraud, Mercier.
NIORT (F.). – Mlle Maurin.
ORAN. – MM. Boulinier, Pasqualini, Tutenuit.
ORLÉANS. – MM. Fouyé, Lamoureux, Malnoy, Papeleir.
PARIS, *Michelet.* – MM. Ladet, Martinand, Poirot, Richard (E.).
PARIS, *Victor-Hugo* (F.) – Mmes Gambier, Vimeux.
REMIREMONT (C.). – M. Demange.
ROMANS (C.). – M. Verdy.
ST-AMAND-SUR-CHER (C.). – M. Gannat.
ST-ETIENNE (F.). – Mlle Jacquemin.
STRASBOURG (F.). – Mlle Collet, Mme Flamant, Mlle Küss, Mme Ollivier.
TARBES. – MM. Dilhan, Mitault.
TOUL (C.). – M. Cholez.
TOULON. – MM. Bouteiller, Claude, Costabel, Duchemin, Millot, Ozil.
TUNIS. – MM. Chaignon, Gründler, Hais, Lalande, Patou, Perrachon.
VALENCIENNES (F.). – Mlle Moulin.
VENDÔME (C.F.). – Mlle Melet.
VERSAILLES. – MM. Aubry, Garde, Guadet, Halphen, Le Diouron
Lefranc, Perrin, Schlesser.
VIRE (C.). – M. Sourisse.

III. CONSEIL SUPÉRIEUR DE L'I.P.

Dans sa dernière session de décembre 1921, le Conseil Supérieur de l'Instruction publique a, en réponse au questionnaire que lui avait adressé M. le Ministre, émis les vœux suivants :

1° – Création de deux enseignements, vraiment secondaires, de culture générale et désintéressée, donnés par les mêmes maîtres, dont l'un à base gréco-latine, l'autre à base de français.

Une assez faible majorité a proposé que dans la section moderne, le latin soit enseigné pendant deux années ; mais devant l'impossibilité de s'entendre sur la place de ces deux années dans le cours des études, le C.S. s'est réservé d'étudier ultérieurement sous quelle forme et à quel moment se ferait cette étude du latin.

2° – Dans l'enseignement gréco-latin, le latin serait étudié à partir de la 6^{o}, le grec, à partir de la 5^{o}.

3° – Désireux de voir se développer simultanément la culture scientifique et la culture littéraire, le C.S. demande que la bifurcation n'ait lieu qu'à la fin de la 1re, repoussant la proposition faite par plusieurs membres d'établir cette bifurcation à la fin de la 2^{e}. Cette résolution s'applique aux deux types d'enseignement.

4° – Dans l'enseignement gréco-latin, étude d'une langue vivante obligatoire dès la 6^{e}, et ultérieurement, d'une langue vivante facultative. Dans l'autre enseignement, une langue vivante obligatoire dès la 6^{e}, une seconde langue vivante obligatoire dont l'étude commencerait le plus tôt possible.

5° – Mêmes sanctions pour les deux enseignements.

6° – Les horaires ne devront jamais dépasser 22 heures, dessin non compris ; dans les basses classes, plusieurs heures seront consacrées, non à des cours, mais à des éances de travail, sous la direction du professeur.

7° – Réforme de l'enseignement secondaire des jeunes filles dont le plan d'études serait identique à celui des jeunes gens.

Indépendamment de la réforme de l'enseignement secondaire, le C.S. a été appelé à donner son avis sur des projets de décrèts ou d'arrêtés, dont deux intéressent plus particulièrement nos comègues mathématiciens.

1. Pour être admis à subir les épreuves du doctorat ès sciences, les candidats devront justifier du diplôme de licencié avec mention de certificats appartenant à un groupe conférant la licence d'enseignement. Les autres licenciés, non pourvus de ces certificats, pourront être admis à subir les épreuves du doctorat ès sciences après avis favorable du Conseil de la Faculté : ils ne pourront ainsi enseigner dans les Facultés.

2. L'équivalence accordée antérieurement entre le certificat d'admission à l'École Centrale et le certificat de Mathématiques générales est étendue au certificat d'inscription sur la liste établie par le Jury d'admission, sous réserve d'une moyenne ne devant pas être inférieure de plus de 5% à celle du dernier élève admis.

3. Le diplôme d'Ingénieur des Arts et Manufactures est tenu pour équivalent à l'un des certificats suivants : Mécanique physique, Chimie appliquée, Électronique générale.

A. GRÉVY.

IV. DOCUMENT OFFICIEL

RÉORGANISATION DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, SPÉCIALES PRÉPARATOIRES, CENTRALE ET CENTRALE PRÉPARATOIRE

Les mesures prises par l'École Centrale en vue d'une nouvelle distribution de ses concours d'entrée exigent une adaptation des classes de mathématiques spéciales, de spéciales préparatoires, de centrale et de centrale préparatoire à une tâche nouvelle.

J'ai l'honneur de vous adresser, en conséquence, les instructions qu'il m'appartient, d'accord avec l'Inspection Générale, de vous faire parvenir à ce sujet :

Jusqu'à présent, les matières de l'unique concours d'admission à l'École Centrale étaient puisées, pour les mathématique spéciales, dans le programme maximum adopté par la commission interministérielle de 1904. On y joignait une révision des mathématiques élémentaires qui figurent au programme de la classe de mathématiques AB. Ces matières étaient développées, chaque année, dans les cours préparant à l'École Centrale. Les élèves qui ne se sentaient pas assez forts pour affronter le concours faisaient une première année d'études dans les classes de spéciales préparatoires ou de centrale préparatoire.

Beaucoup de candidats à l'École polytechnique ne voulant pas risquer leur avenir sur les épreuves du seul concours d'admission à cette école se présentaient en même temps à l'École centrale et un grand nombre y étaient reçus. Quoi qu'on fasse, on n'empêchera pas les jeunes gens qui ne se sentent pas sûrs du succès, dans une vooie déterminée, de frapper à plusieures portes. Il vaut mieux accepter ce fait et organiser les classes en conséquence. En 1922, il y aura un concours complet d'admission à l'Ecole Centrale (programme C) ; la même année et les suivantes aura lieu un concours d'admission (programme A) ; les années suivantes, un concours d'admission (programme B).

Après un examen attentif des solutions adaptant l'organisation actuelle à cet état de choses, il m'a semblé qu'on peut résoudre la question sans engager sérieusement l'avenir et sans augmenter sensiblement les charges imposées aux finances de l'État. Pour y parvenir, il convient de distinguer les cas assez nombreux que l'on rencontre dans le régime actuel des classes visées.

I. *Lycées n'ayant qu'une classe de mathématiques spéciales :* AMIENS, CAEN, DOUAI, NICE, NÎMES, ORLÉANS, POITIERS, ROUEN, TOURS [1]

Ces classes sont organisées en vue des concours auxquels le candidat peut se présenter au bout d'une année d'études spéciales : École Normale Supérieure (Sciences), École Polytechnique, École Centrale actuelle, École des Mines de Paris et de St-Etienne, École des Ponts et Chaussées. Le régime et l'horaire de ces classes subsisteront. Toutefois, pour donner satisfaction aux candidats à l'École Centrale qui désireraient achever leurs études dans leur lycée d'origine, on facilitera la révision des mathématiques élémentaires, figurant à la première partie du concours nouveau, en accordant des heures supplémentaires correspondantes. Comme ces candidats auront déjà suivi la classe de mathématiques AB, et que leur nombre ne sera jamais très élevé, on pourra leur demander un effort personnel. Dans ces conditions, une heure supplémentaire suffira lorsque le nombre des candidats à la première partie ne dépasse pas 10 et deux lorsque ce nombre dépasse 10.

II. *Lycées ayant deux classes de mathématiques spéciales, spéciales préparatoires ou centrale* : ALGER, BESANÇON, CLERMONT-FERRAND, GRENOBLE, LILLE, MONTPELLIER, RENNES, BUFFON, CARNOT, CHARLEMAGNE, CONDORCET, HENRI IV, ROLLIN, VERSAILLES [2] – Il faut encore mentionner le PRYTANÉE qui dépend du Ministère

[1] À ajouter Reims depuis octobre 1921 (N. D. L. R.).
[2] Á ajouter METZ, STRASBOURG (N. D. L ; R.)

de la Guerre.

L'organisation rationnelle est la suivante :

a) Une classe de spéciale préparatoire et centrale 1^re^ année, recevant les élèves qui désirent aller ensuite dans la classe de spéciales et les candidats à l'admissibilité de l'École Centrale. On conservera l'horaire actuel de la classe de spéciales préparatoires. Le programme comprendra naturellement les matières exigées au concours d'admissibilité (programme A) et celles qui seront jufées utiles à la formation des futurs élèves de spéciales, toutes tirées du programme maximum. Deux heures au moins seront consacrées à la révision des mathématiques élémentaires.

b) Une classe de spéciales qui recevra les candidats à l'École Polytechnique et aux Écoles ayant un programme similaire, ainsi que les candidats au concours d'admission à l'École Centrale.

Cette organisation est désirable dès la rentrée prochaine.

Les candidats au concours complet de 1922 (programme C) trouveront tout l'enseignement nécessaire dans les deux classes précitées : ils pourront prendre les matières du programme de spéciales dans la classe de spéciales et suivre la révision de mathématiques élémentaires avec les candidats à l'admissibilité.

Une objection a déjà été faite, touchant les lycées de Paris qui rentrent dans cette catégorie. On fait valoir que ces lycées ne pourront plus lutter à armes égales avec ceux qui possèdent de multiples classes préparatoires. Cette objection n'a guère plus de poids aujourd'hui que dans le passé. Le nombre des lycées visés et l'impossibilité de distinguer obligent à passer ouitre.

Chaque fois qu'une création sera faite dans un lycée qui ne possède pas encore de classes de spéciales, c'est au premier type – classe de spéciales préparatoires et centrale 1re année – qu'on devra accorder la préférence [3]

III. *Lycées ayant trois classes de spéciales ou classes connexes* : BORDEAUX, LYON, MARSEILLE, NANCY, NANTES [4], TOULOUSE ; – ainsi que le collège CHAPTAL qui dépend de la Ville de Paris.

On adoptera le régime suivant : ***a)*** Une classe de spéciales préparatoire et centrale 1re année du type précité ;

b) Une classe de spéciales recevant les candidats à l'École Polytechnique et aux Écoles ayant un programme similaire ;

c) Une classe de centrale préparant au concours complet de 1922 avec l'horaire actuel. Cette classe sera remplacée, en 1922, par une autre préparant au concours d'admission avec un horaire maximum de 14 heures (programme B).

Il pourra se faire que le nombre des candidats au concours d'admission devienne assez faible, dans certains établissements, pour que la classe de spéciales puisse les accueillir ; ce sera alors la suppression de la classe de centrale et on reviendra à la seconde catégorie.

[3] Depuis la rentrée, LAKANAL possède une classe de Spéciales de ce premier type (N. D. L. R.)

[4] Depuis la rentrée, Nantes appartient à la seconde catégorie (n. d. l. r.)

IV. *Lycées ayant plus de trois classes de spéciales ou classes connexes* : Ce sont JANSON-DE-SAILLY, LOUIS-LE-GRAND et ST-LOUIS.

Le premier a actuellement une classe de centrale préparatoire, une classe de spéciales préparatoire, deux de centrale et une de spéciales.

Le second a une classe de spéciales préparatoires, deux de centrale, deus de spéciales.

Enfin, le troisième a deux classes de centrale préparatoire, deux de spéciales préparatoires, quatre de centrale, quatre de spécilales.

On établira ou on maintiendra, dans ces établissements, quatre sortes de classes ;

a) Centrale 1re année, visant le concours d'admissibilité de l'École Centrale (programme A) avec un horaire maximum de 14 heures.

b) Spéciales préparatoires et centrale 1re année, du type précité ;

c) Spéciales, recevant les candidats à l'École Polytechnique et aux Écoles qui ont un programme similaire ;

d) Centrale, préparant au concours complet de 1922 avec l'horaire actuel. Ces classes seront remplacées, en 1922, par d'autres préparant au concours d'admission avec un horaire maximum de 14 heures (programme B).

Le nombre de candidats au concours d'admission à l'École Centrale sera certainement moindre, dans l'avenir, que celui des candidats à l'admissibilité. On peut donc escompter la transformation d'un certain nombre de classes (2^{e} année) en classe de centrale 1re année.

Vous voudrez bien porter ces instructions à la connaissance des chefs d'établissements de votre académie et m'en accuser réception.

DEUXIÈME PARTIE

Prière d'adresser au Secrétaire, M. Delcourt, 17 rue Louis-Braille, Paris 12$^{\text{o}}$, toute communication relative à la rédaction de la deuxième partie du *Bulletin*.

En particulier, il sera reconnaissant aux membres de l'Association qui voudront lui envoyer, dès leur apparition, les énoncés de problèmes d'examens et de concours qu'ils sont à même de se procurer, ou lui signaler les articles de pédagogie ou d'enseignement mathématique publiés par les revues françaises ou étrangères dont ils peuvent avoir connaissance.

UNE CONSÉQUENCE INATTENDUE D'UN PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

La substitution de l'équation $AC = 0$ à l'équation $A = 0$, sous réserve que les solutions considérées n'annulent pas C, donne lieu parfois à des observations un peu surprenantes. on peut les ramener au type suivant :

> « *Soit* $\dfrac{A}{B} = 0$ *une équation rationnelle ; nous remplaçons la résolution de cette équation par celle de* $A = 0$, *en multipliant les deux membres par* B. *L'équivalence n'est pas altérée, si nous supposons* B *non nul.* »

Ceux qui s'expriment ainsi ne remarquent pas qu'un système de valeurs des inconnues, qui annule B, enlève toute signification à l'expression $\dfrac{A}{B}$ et qu'il est au moins inutile de parler d'équivalence dans ces conditions.

En réalité, on doit s'abstenir, une fois pour toutes, de donner aux variables des valeurs telles que les symboles employés n'aient plus de sens. Quand on affirme que toute solution de $A = 0$ est solution de $AC = 0$, on suppose implicitement que la valeur numérique de C correspondante est limitée ; le passage de la seconde équation à la première s'effectue en multipliant les deux membres par $\dfrac{1}{C}$ qui n'est plus limité si C s'annule.

E. BLUTEL

SUR DEUX FORMULES DE VII^{E} LIVRE

Les notations employées au VI^{e} et surtout au VII^{e} Livre de géométrie pour les aires et volumes, présentent une confusion qui rend pénible l'effort de mémoire imposé aux élèves. On peut y remédier, croyons-nous, à l'aide des formules suivantes :

Désignons par m la *médiatrice*, c'est-à-dire la perpendiculaire à la ligne tournante (segment de droite ou arc de cercle), menée par le milieu de cette ligne et limitée à l'axe de révolution ; soit p la projection sur cet axe de la ligne tournante. La formule :

$$S = 2mp$$

donne l'aire de tous les corps du VII^{e} Livre, depuis le cylindre jusqu'à la sphère.

Mais c'est surtout pour les volumes que les mots *base* et *hauteur*, employés au petit bonheur occasionnent des notations incohérentes, auxquelles il est facile de remédier. Par exemple, pour tous les corps *pointus* – pyramides, cône, triangle tournant, secteur polygonal régulier tournant, secteur sphérique, sphère – appelons *base* et désignons par B la surface opposée à la *pointe* fixe, désignons par d la plus courte distance de la *pointe* à la *base*, et la formule :

$$V = \frac{1}{3}Bd$$

conviendra pour tous les cas signalés. A. DECERF, *Professeur au lycée de Cherbourg.*

SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES À DEUX RAISONS

Le problème consiste à étudier l'ensemble E des nombres de la forme $na + pb$, a et b désignant des nombres donnés, n et p des entiers variables, positifs nuls ou négatifs.

Il est à peine besoin de rappeler que la question est classique, que M. GOURSAT, dans son *Cours d'Analyse* la traite dans le domaine complexe à propos des périodes des fonctions et que TANNERY s'en est occupé dans la seconde édition de l'*Introduction à la théorie des fonctions*. L'expression de progression arithmétique à deux raisons est tirée d'un article de M. LEBESQUE (*Bulletin de la Société Mathématique*, tome XXXV, 1907) que l'auteur m'a signalé à l'occasion de ce travail d'adaptation auquel il s'est intéressé.

On le voit déjà, la présente note a un but des plus modestes. Nous allons simplement introduire ces progressions en reprenant un raisonnement tout à fait intuitif, celui de la recherche de la commune mesure, puis, rassembler quelques unes des applications de cette notion qui se rencontrent à des degrés divers de notre enseignement.

Supposons $|a| > |b|$ et considérons les deux suites :

$$\begin{array}{cccc} b, & 2b, & 3b, & \cdots \\ -b, & -2b, & -3b, & \cdots \end{array}$$

Ou bien a est un terme de l'une de ces suites et $\dfrac{a}{b}$ est entier, ou bien a est compris entre deux termes consécutifs. Soit kb le terme le plus voisin de a (ou l'un des deux voisins si a est équidistant de deux termes) ; posons $c = a - kb$; c est tel que $|c| \leqslant \dfrac{|b|}{2}$. Montrons, ce qui est presque immédiat, que l'ensemble E est identique à l'ensemble E' formé des nombres $n'b+p'c$, n' et p' désignant des entiers variables ; tout nombre de la forme $na + pb$ peut en effet se mettre sous la forme $n'b + p'c$ comme on le voit en y remplaçant a par $kb + c$, et inversement, tout nombre de la forme $n'b + p'c$ se met sous la forme $na + pb$ comme on le voit en y remplaçant c par $a - kb$. recommençons l'opération avec b et c ; ou bien $\dfrac{b}{c}$ est entier ou bien nous aurons un reste d tel que $|d| \leqslant \dfrac{|c|}{2}$ et nous verrons encore que l'ensemble E' (et par suite l'ensemble E) est identique à l'ensemble E'', formé des nombres de la forme $n''c + p''d$, n'' et p'' désignant des entiers variables.

Poursuivons ces opérations. Deux cas peuvent se produire :

1^{o} La suite des opérations est limitée. C'est-à-dire qu'il existe deux restes consécutifs f et g tels que $\dfrac{f}{g}$ soit entier, ou que le reste suivant, h, est nul. Par suite, on voit que l'ensemble E se réduit à la progression arithmétique ordinaire de terme général N_g, N désignant un entier variable.

Ce cas est celui où $\dfrac{a}{b}$ est rationnel.

Il est bon de faire la remarque suivante : le cas de $\dfrac{a}{b}$ rationnel est caractérisé par ce fait qu'il existe deux nombres de l'ensemble E égaux bien qu'ils correspondent aux deux couples différents d'entiers n', p' et n'', p''. Il résulte en effet de cette hypothèse que

$$\frac{n'-n''}{p'-p''} = \frac{a}{b}$$

et par suitre, que $\dfrac{a}{b}$ est rationnel. Réciproquement, $\dfrac{a}{b}$ étant rationnel et égal à la fraction irréductible $\dfrac{h}{k}$, les couples d'entiers n'' et p'' qui donnent la même valeur au nombre de l'ensemble E que le couple n', p' s'obtiennent en écrivant les rapports égaux :

$$\frac{n'-n''}{p'-p''} = \frac{b}{a} = \frac{k}{h}$$

et en déduisant de là : $n'' = n' - \lambda k$, $p'' = p' + \lambda k$, λ désignant un entier quelconque. En particulier, les nombres de l'ensemble E qui sont nuls correspondent aux couples $-\lambda k$, λh

2^o^ La suite des opérations est illimité. Nous avons formé une suite infinie de nombres $a, b, c, \cdots$ Deux consécutifs quelconques d'entre eux peuvent être pris comme raisons pour définir l'ensemble E. Il est essentiel de remarquer qu'à partir du troisième, chacun de ces nombres est inférieur à la moitié du précédent. Cette suite a donc une limite nulle. Disons encore, puisque ces nombres appartiennent à l'ensemble, que nous avons pu former une suite infinie de nombres de l'ensemble E tous différents de zéro et tendant vers zéro.

La différence avec le premier cas est en évidence. Ici, $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel.

Montrons maintenant que, dans ce cas, il est possible de trouver des nombres de l'ensemble aussi voisin que l'on voudra de tout nombre x choisi arbitrairement, ce qui s'exprime d'un mot en disant que l'ensemble est partout dense lorsque $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel.

Reprenons la suite $a, b, c, \cdots$ des nombres de l'ensemble qui tend vers zéro sans contenir de nombres nuls. Soit j un terme quelconque de cette suite. L'ensemble E contient la progression $\cdots, -2j, -j, 0, j, 2j, \cdots$; ou bien x est l'un des termes de cette progression, ou bien x est compris entre deux termes consécutifs. Dans les deux cas, il existe un nombre de l'ensemble de la forme $x + j'$, j' ne dépasant pas j en valeur absolue.

Nous avons donc trouvé une suite infinie $x + a', x + b', x + c', \cdots x + j', \cdots$ de nombres de l'ensemble qui admet pour limite un nombre x arbitrairement choisi.

Faisons quelques remarques au sujet de cet exposé :

1^o^ Dans le premier cas, celui où $\dfrac{a}{b}$ est rationnel, il suffit de supposer a et b entiers, pour obtenir la résolution en nombres entiers de l'équation du premier degré à deux inconnues à cœfficients entiers ou, ce qui revient au même, la résolution de la congruence du premier degré à une inconnue.

2^o^ Nous aurions pu, dans le cas où $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel, présenter les faits sous la forme plus générale de la façon suivante qui utilise une idée simple et importante : soient i et j deux termes consécutifs quelconques de la suite $a, b, c, \cdots$. les nombres de l'ensemble E sont de la forme $Ni + Pj$, N et P désignant des entiers variables. Cherchons les nombres de l'ensemble contenus dans un intervalle. quelconque d'étendue j, soit x, $x + j$. Pour cela, fixons N et faisons varier P. Nous obtenons une progression arithmétique de raison j qui possède, dans l'intervalle considéré, un seul terme à moins que les deux limites x, $x + j$ ne fassent partie de cette progression. Donnons maintenant à N toutes les valeurs entières et nous aurons formé la suite infinie des nombres de l'ensemble appartenant à l'intervalle x, $x+j$.

3° C'est, au fond, l'idée de progression arithmétique à deux raisons qui intervient dans la démonstration classique du théorème de LEJEUNE-DIRICHLET qu'on trouvera dans les *Leçons d'Arithmétique* de TANNERY (Exercice 317 de la 1re édition). Je me borne à rappeler l'énoncé de ce théorème :

> Soit a un nombre irrationnel donné et m un entier positif donné. Il existe des entiers n et p dont le premier est inférieur ou égal à m, et tels que l'on ait $|na-p|<\dfrac{1}{m}$.

4° Nos résultats contiennent l'étude de la distribution des points d'abscisses curvilignes na sur le cercle trigonométrique, n étant un entier variable.

Ces points ont aussi pour abscisses curvilignes $na+p.2\pi$, p désignant un entier quelconque. Nous voilà ramenés à une progression arithmétique à deux raisons ;

Lorsque $\dfrac{a}{2\pi}$ est rationnel, les points considérés sont en nombre fini. Le problème est celui de l'inscription des polygones réguliers ; il n'y a pas lieu de s'y attarder.

Lorsque $\dfrac{a}{2\pi}$ est irrationnel, il suffit de traduire géométriquement un résultat que nous avons obtenu et de dire : nous savons extraire de l'ensemble des points d'abscisses $na+p.2\pi$ une suite infinie de points admettant pour position limite un point arbitrairement choisi sur le cercle.

Ces résultats peuvent être présentés autrement en introduisant les suites dont les termes généraux sont $\sin na$, $\cos na$, $\operatorname{tg} na$.

N'insistons pas sur la cas où $\dfrac{a}{2\pi}$ est rationnel sauf pour dire que la première et dernière de ces suites n'admettent alors de limites que si a est multiple de π et leurs termes sont tous nuls. La seconde n'en admet que si a est multiple de 2π et ses termes sont tous égaux à 1.

Lorsque $\dfrac{a}{2\pi}$ est irrationnel, non seulement ces suites n'admettent pas de limites mais, précisons-le avec la tangente, par exemple, on peut former une suite infinie $\operatorname{tg} n_1 a$, $\operatorname{tg} n_2 a$, $\cdots$ extraite de la suite $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\cdots$, $\operatorname{tg} na$, $\cdots$ admettant pour limite L arbitrairement choisi ou encore, admettant une limite infinie.

On trouvera sur cette question, des articles de MM. LAPOINTE, MICHEL, MONTEL, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences* (10e et 11e année, 191 et 1917).

Rappelons en quelques mots que les points d'abscisses curvilignes en progression arithmétique se rencontrent lorsqu'on cherche les symétriques du point d'abscisse curviligne x par rapport à deux diamètres du cercle que nous fixerons en disant qu'ils passent par les points d'abscisses curvilignes o et a. On obtient ainsi les deux suites de symétriques :

$$\begin{array}{cccc} x & x+2a, & x+4a, & \cdots \\ -x, & -x-2a, & -x-4a, & \cdots \end{array}$$

Les points de la première suite sont symétriques de tous les points de la seconde par rapport aux axes na, n désignant un entier quelconque. D'où la disposition de la rosace finie ou infinie d'axes de symétrie qui se déduit de l'existence des deux premiers axes supposés concourants.

M. LAPOINTE a cherché les cas où $\sin na$ admet une limite, tout simplement en utilisant les formules d'addition des lignes trigonométriques.

Il est bon, en effet, dès que la notion de limite est acquise, de parler aux élèves de telles suites qui les intéressent et de leur faire ainsi toucher du doigt certaines difficultés aussitôt que possible.

On peut, suivant une méthode analogue à celle de M. LAPOINTE, utiliser les deux formules :

$$\begin{aligned} \sin(n+2)a - \sin na &= 2\sin a.\cos(n+1)a \\ \cos(n+2)a - \cos na &= -2\sin a.\sin(n+1)a \end{aligned}$$

Mettons à part le cas où $\sin a$ est nul. La première formule montre que, $\sin na$ admettant une limite, $\cos(n+1)a$ ou, plus simplement $\cos na$ tend vers zéro. La seconde montre que $\cos na$ admettant une limite, $\sin(n+1)a$ ou, plus simplement $\sin na$ tend vers zéro. La contradiction est manifeste puisque $\sin na$ et $\cos na$ ne peuvent tendre simultanément vers zéro.

La suite dont le terme générale est $\operatorname{tg} na$ s'étudie, à ce point de vue, tout aussi facilement. Il est immédiat qu'après ce qui précède que $\operatorname{tg} na$ ne peut admettre de limite infinie car cela exigerait que $\cos na$ tende vers zéro. $\operatorname{tg} na$ ne peut non plus admettre de limite finie (hors le cas où a est multiple de π). La formule :

$$\operatorname{tg}(n+1)a - \operatorname{tg} na = \frac{\sin a}{\cos na.\cos(n+1)a}$$

montre en effet que le premier membre tendant alors vers zéro, le dénominateur du second membre croîtrait donc indéfiniment, ce qui est absurde.

Pour terminer, indiquons que l'étude de $f(na)$, $f(x)$ désignant une fonction continue périodique résulte de ce qui précède.

Rappelons aussi que les développements de paragraphe II conduisent immédiatement aux théorèmes suivants (dans le domaine réel bien entendu).

1. Si une fonction admet deux périodes a et b telles que le rapport $\dfrac{a}{b}$ soit rationnel, ces deux périodes se réduisent à une seule.
2. Une fonction continue qui admet deux périodes a et b telles que le rapport $\dfrac{a}{b}$ soit irrationnel reste constante.

TH. LECONTE

ENQUÊTE SUR LES MODIFICATIONS ÉVENTUELLES DES PROGRAMMES

COMMUNICATION DE LA SECTION DE POITIERS

SIXIÈME ET CINQUIÈME – Arithmétique pratique et Système métrique. *La théorie des nombres serait écartée du programme, sauf des notions très simples sur la décomposition des nombres en facteurs premiers).*

QUATRIÈME – Géométrie plane, Livres I et II.

TROISIÈME – Géométrie : théorème de Thalès, Triangles semblables, Triangle rectangle, Polygones réguliers, Aires (*Programmes limitatif*).

Éléments du calcul algébrique, Équation numériques de 1er et du 2^{e} degré.

Géométrie : programme de QUATRIÈME et TROISIÈME.

SECONDE et PREMIÈRE SCIENTIFIQUE – Programme actuel, allégé de la géométrie cotée. (*La théorie des logarithmes serait basé sur la définition suivante :* Les logarithmes des nombres a et b sont des nombres tels que : $\log a + \log b = \log ab$; et $\log 10 = 1$).

PHILOSOPHIE – Cosmographie, *avec au Baccalauréat une interrogation sur ce Cours de Cosmographie.*

MATHÉMATIQUES – Programme actuel, allégé de la Mécanique, mais augmenté d'une révision sérieuse du cours de Géométrie.

COMMUNICATION DE M. WEBER (*Buffon*)

L'enseignement de l'arithmétique élémentaire comprend quatre parties, nettement distinctes, et qu'on a tort selon moi de mélanger dans une confusion souvent presque inextricable.

I. *Définitions et propriétés des opérations fondamentales* relatives aux nombres entiers et fractionnaires. – C'est la partie essentielle ; à mon sens elle doit se traiter en premier lieu, sans qu'on ait à se péoccuper à ce moment de la numération et des règles pratiques du calcul. Les *Instructions* de 1905 indiquent d'ailleurs que « *les faits les plus importants de l'algèbre ayant été* rencontrés *dans les exercices des classes de cinquième et de quatrième . . .* ». Or, insistons-nous toujours suffisamment dans ces classes sur des règles et des théorèmes tels que les suivants : addition et soustraction des sommes et des différences, propriétés commutatives et associatives des suites d'additions et de soustractions, etc.

II. *Applications* des théories générales à l'étude de la *numération décimale*. – Cette étude me paraît surtout utile pour préciser les principes théoriques et en donner des illustrations ; par exemple : l'étude de la multiplication, les caractères de divisibilités, la preuve par 9, etc. Mais elle ne me paraît pas présenter *en soi* le même intérêt ni la même importance que la partie précédente. Qu'un élève soit incapable d'exposer correctement la « *théorie* », comme on dit souvent, c'est-à-dire la « *pratique* » de la division ou de la racine carrée en numération décimale, c'est peut-être regrettable, mais je préfère, s'il faut choisir, qu'il ait bien compris le double rôle de la division, et la définition de la racine carrée à une approximation donnée, et qu'il sache ramener les problèmes relatifs aux nombres fractionnaires à des problèmes relatifs aux nombres entiers. On donne peut-être aux règles pratiques habituellement suivies une importance trop absolue ; elles ne sont que des procédés commodes pour diriger méthodiquement et réduire au minimum les tâtonnements, les essais successifs, qui constituent au fond l'unique méthode du calcul numérique.

À cette partie, on peut rattacher la théorie des erreurs.

III. *Applications à la mesure des grandeurs* et questions connexes. – C'est là que se placent le système métrique et l'étude des grandeurs proportionnelles. Inutile de parler du système métrique dont l'importance, je pense, n'est pas mise en doute par personne. En ce qui concerne les grandeurs proportionnelles, il y aurait intérêt à rapprocher, et même parfois à fondre, certains chapitres des cours de géométrie et d'arithmétique. Le programme de 4^{e} B se prête particulièrement à cette fusion, puisqu'il comporte à la fois l'étude des fractions ordinaires (étude évidemment plus théorique que celle faite deux années auparavant en 6^{e} B), et le III^{e} livre de géométrie. J'ai tenté de réaliser cette idée il y a quelques années et j'ai été très satisfait de mon essai.

IV. Reste enfin la partie profonde, la véritable arithmétique, théorique : diviseurs et multiples communs à plusieurs nombres, nombres premiers entre eux, nombres premiers et les conséquences.

Cette étude est d'un intérêt philosophique, logique et scientifique considérable. Mais pour la grande majorité des élèves qui composent actuellement nos classes de mathématiques AB, cet enseignement n'offre à peu près aucune signification ; on est trop souvent réduit à leur « bachoter » les démonstrations une à une ; je n'insiste pas sur l'exemple célèbre du malheureux nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux, ou bien de celui qui est premeir avec tous les facteurs d'un produit.

Il me paraît donc qu'il s'agit là d'un enseignement de luxe, uniquement à la portée des élèves à la fois sérieux et intelligents ; il faudrait non pas le supprimer, mais le rendre facultatif et le réserver à une élite sélectionnée. D'ailleurs on pourrait en faire autant pour de nombreuses autres questions, les plus intéressants des programmes de géométrie et d'algèbre.

Mais la *vraie* solution consiste à réserver *tout* l'enseignement secondaire à des élèves aptes à le recevoir [5]. Tant que l'on ne se décidera pas à le faire, on n'aboutira à rien ; on perdra son temps à alléger, à modifier, à supprimer, à permuter, à restreindre programmes et horaires. Toute réforme pédagogique est d'abord et avant tout une question d'élèves et de professeurs ; ce n'est qu'en seconde ligne

[5] Je me permets de renvoyer sur ce point à la proposition soumise au Referendum : cf *Bulletin de la Fédération*, mai 1921, page 734.

que les programmes interviennent.

Nota. – Dans ce qui précède je me suis occupé surtout du choix des matières et de leur hiérarchie ; il ne faudrait pas en conclure que je sois nécessairement partisan pour cela d'un mode d'exposition dogmatique. Dans les classes du début, 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, 3^{e} même, on pourrait essayer d'amener peu à peu les élèves à la connaissance des faits (surtout ceux du groupe I : propriétés des opérations) à l'aide de problèmes soigneusement étudiés et savamment gradués. C'est une idée très séduisante, mais sa réalisation exigerait beaucoup de temps ; à la fois au professeur pour ses préparations, et aux élèves qui disposent à mon avis d'un nombre d'heures de classes trop restreint pour qu'on puisse abandonner complétement les procédés d'exposition dogmatique. D'ailleurs il faut croire que cette idée n'est pas commode à réaliser, puisque les principaux manuels connus appliquent tous la méthode exclusivement dogmatique et théorique. À ce propos, je signale un manuel qui, bien qu'il suive la méthode dogmatique, est rédigé dans un esprit analogue à celui que j'ai défini au début ; il s'attache surtout aux propriétés des opérations et offre un choix d'exercices et de problèmes très variés et pleins d'intérêt : c'est le livre de Laisant et Perrin, destiné à la classe de 5^{e} B, et édité il y a une quinzaine d'année par la maison Paulin, disparue depuis lors.

PROBLÈMES DE CONCOURS ET D'EXAMENS

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES DE FONTENAY ET ST CLOUD

Arithmétique et Algèbre

1. n étant un nombre entier positif, on considère la fraction :

$$\frac{n^2-n+41}{n^2+n+17}$$

   Comparer, suivant les valeurs de n, cette fraction au nombre 1 puis au nombre 3.

   Montrer que la fraction se simplifie quand le reste de la division de n par 173 est égal à 12.

2. x étant un nombre algébrique, qui peut prendre toutes les valeurs possibles, on considère l'expression :

$$y=\frac{x^2-x+41}{x^2+x+17}$$

   Les valeurs de x pour lesquelles y est égal à un nombre donné b sont les racines d'une équation du second degré.

   Calculer à 0,01 près les limites entre lesquelles b doit être compris pour que cette équation ait des racines.

   Quel que soit b, les racines sont liées par une relation, indépendante de b, qu'on demande de former.

En déduire tous les couples de valeurs entières, positives ou négatives, tels que y prend la même valeur quand on donne à x les valeurs d'un même couple.

Géométrie

1. Étant donné un triangle ABC, démontrer que le lieu géométrique des points M du plan de ce triangle pour lesquels les distances MA, MB et MC vérifient la relation :
$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \qquad (1)$$
est une circonférence.
2. Réciproquement, étant donnée une circonférence $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R, démontrer qu'il existe dans le plan de cette circonférence une infinité de triangles ABC tels que les distances MA, MB et MC d'un point quelconque M de cette circonférence aux trois sommets du triangle ABC vérifient la relation (1).
3. Connaissant la position de l'un de ces sommets, trouver le lieu géométrique des deux autres sommets, le lieu du point de concours des médianes du triangle ABC, du point de concours des hauteurs, du centre du cercle circonscrit. Le sommet donné peut-il être un point quelconque du plan ?
4. Connaissant la position du milieu d'un des côtés du triangle ABC, trouver le lieu géométrique des sommets du triangle.
Même question en supposant connu le centre du cercle circonscrit.

Baccalauréat 1re partie C et D, juillet 1921

Aix-Marseille

Soit un triangle ABC isocèle ; soit b la longueur des côtés égaux AB et AC. On demande :

1. De calculer en fonction de b et des lignes trigonométriques de l'angle B, le rayon R du cercle circonscrit au triangle, le rayon r, le périmètre et la surface du cercle inscrit ;
2. D'exprimer en fonction de $\cos B$ seul, le rapport $\dfrac{r}{R}$.
3. D'exprimer $\cos B$ de manière que ce rapport soit égal à une valeur donnée k ; de dire entre quelles limites doit être compris k pour que le triangle existe ; de calculer les angles du triangle lorsque $k = \dfrac{1}{2}$.

Alger

On donne une sphère de rayon R ayant pour grand cercle le cercle O, et dans le plan du cercle un point fixe A à l'intérieur de ce cercle ($OA = a$). Par le point A on mène un plan perpendiculaire au plan de la figure et dont la trace est la corde BD.

Ce plan coupe la sphère suivant un cercle $\mathscr{C}$. On considère le cône ayant pour base le cercle $\mathscr{C}$ et pour sommet un point fixe S pris sur OA ($OS = b$).

1. Exprimer le volume du cône en fonction de l'angle $OAC = x$.
2. Étudier la variation de ce volume quand x varie (Représentation graphique). Construire géométriquement la position de la corde BD pour laquelle le volume est maximum.

   (*Le* plan de la figure *est le plan du cercle O ; le point S est représenté extérieur au cercle O et sur le prolongement du rayon OA ; les droites SB, SD et OC – C milieu de DB – sont tracées sur la figure*).

Besançon, Série C

Un point A se meut sur une ligne droite Ox et l'espace e parcouru sur cette droite à partir du point O et au bout du temps est donné par la formule :

$$e = 4t - 3t^2.$$

1. On demande les expressions de la vitesse et de l'accélération.
2. Au bout de quel temps le point A s'arrête-t-il pour rétrograder et après avoir parcouru quel espace ? Quelle est alors son accélération ?
3. Au bout de quel temps le point A repasse-t-il au point O ? Quelle est alors sa vitesse et quelle est son accélération ?
4. Étudier les variations de l'espace et de la vitesse en fonction du temps.

Besançon, Série D

Une droite AB, de longueur a, est divisée en trois parties égales par les points C et D. Sur AB comme diamètre, on décrit une circonférence sur laquelle on prend un point quelconque M. On mène $MC = x$ et $MD = y$. On demande :

1. De prouver que : $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{9}a^2$
2. De calculer x et y sachant que l'angle CMD est égal à $\dfrac{\pi}{8}$.

Bordeaux

Soit un losange $ABCD$ dont les côtés ont pour longueur 1. Deux mobiles P et Q se meuvent sur les deux côtés opposés CA et DB ; leurs mouvements sont uniformément variés. En adoptant comme sens positifs les sens CA et DB, les mouvements sont ainsi définis : les accélérations sont l'une et l'autre égales à +2 ; à l'origine des temps, P est en A et sa vitesse est +2, Q est en B et sa vitesse est +1. Soit M l'intersection de PQ avec CD.

1. Étudier le mouvement de M en prenant comme sens positif le sens CD, et comme origine le point D.
2. Construire les courbes représentant pour toutes les valeurs du temps t les variations de $DM = x$ et de la vitesse de M.

3. t_0 étant une époque quelconque, à quelle époque M occupe-t-il la même position qu'à l'époque t_0 ?

(*Une figure montre le sommet B opposé du somet C*).

Caen

Dans un cercle donné de rayon R, on mène une corde et le diamètre perpendiculaire ; soient O le centre du cercle, A l'une des extrémités de la corde, P le po.int d'intersection de la corde et du diamètre ; le triangle OPA, tournant autour de OP, engendre un cône, et posant $\cos x = t$, on exprimera en fonction de R et de t le volume du cône ; puis, supposant variable l'angle de génération, on étudiera la variation de ce volume.

Considérant enfin la valeur de t qui donne le volume maximum, on construira à l'aide de la règle et du compas, sans faire intervenir aucun calcul d'approximation, l'angle de génération correspondant. (On expliquera les constructions effectuées).

Clermont

Un triangle isocèle ABC a sa base BC horizontale et son plan fait un angle x avec un plan horizontal. Il se projète horizontalement suivant un triangle abc, dont l'angle en a est égal à u.

1. Calculer la valeur v de l'angle A du triangle dans l'espace.
2. Étant donnés u et v, calculer x ; discuter.

Les candidats pourront, sans obligation, s'aider de l'épure en supposant que BC soit debout.

Dijon

Soit un quadrilataire (*sic*) $ABCD$ dont deux angles consécutifs B et C sont droits. On pose $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

1. Quelle relation doit-il exister entre a, b, c pour que les diagonales AC et BD soient perpendiculaires ?
2. a, b, c ayant des valeurs données, *quelconques*, avec $a > c$, calculer les angles et les côtés du triangle AED, E étant le point de rencontre des diagonales.
3. Calculer numériquement à l'aide des tables la valeur de l'angle BEC, en supposant : $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

Grenoble

On considère un tétraèdre trirectangle en O, dans lequel les deux arêtes OA et OB sont égales à a ; la troisième arête OC issue de O est égale à $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$.

1. On désigne par d la distance OD de O à AB ; calculer d en fonction de a. Déterminer l'angle que fait le plan CAB avec le plan OAB, en calculant la tangente de cet angle.

2. On considère un point M sur OC, entre O et C, et on désigne par α l'angle MDO ; calculer, en fonction de a et de α, la somme des 3 triangles MAB, MAC, MBC. On désignera cette somme par S.
3. Montrer que, entre O et C, il existe un point M et un seul tel que S est égale à a^2. On déterminera M en prenant pour inconnue $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$.

Lille

Résoudre l'équation trigonométrique :

$$\cos 2x = 2a.\cos x$$

où a est un nombre donné et x un angle inconnu. Discuter explicitement les solutions pour $a = \frac{1}{2}$.

Lyon

Considérons l'équation :

$$(1) \qquad \sqrt{h(x-1)(x-2)} = x - a$$

h est un nombre donné, *plus grand que* 1, a est un nombre donné quelconque. Dans le premier membre on a une racine carré arithmétique.

Chercher suivant les valeurs données à a combien l'équation (1) admet de racines.

Trouver les valeurs approchées des racines à 0,01 près par défaut lorsque $h = 6$, $a = 0,4$.

Montpellier

xy étant la ligne de terre, on donne deux points A et B par leurs projections (a, a'), (b, b'). On placera les données comme il est indiqué dans le croquis ci-après. a est sur la ligne de terre ; $\beta a = 4.aa'$; $\beta b = \beta b' = 3.aa'$; et on pourra prendre $aa' = 2$ cm.

1. Quel est le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des deux points A et B ? Définir ce lieu sur l'épure.
2. Déterminer les points du lieu qui appartiennent aux plans de projection.
3. On donne en outre une droite horizontale (h, h') ayant pour trace verticale le point (v, v') et faisant avec le plan vertical un angle $\widehat{xoh} = 45°$, on prendra $av = vv' = aa'$, et la disposition indiquée sur le croquis. Déterminer les projections du sommet C d'un triangle ayant pour base le segment AB, ce sommet C devant se trouver sur cette horizontale (h, h').
4. Vraie grandeur du triangle ABC.

N. B. – On donnera les explications géométriques indispensables et on justifiera brièvement les constructions faites sur l'épure.

(Le croquis montre que β est l'intersection de la projetante bb' avec la ligne de terre, que l'horizontale hh' a même cote que le point aa' et que les points x, β, a, v, y se suivent dans cet ordre de gauche à droite sur la ligne de terre. – À noter que le croquis indique qu'il convient de lire ci-dessus $\widehat{xvh}$ et non $\widehat{xoh}$).

Nancy

On considère le cône engendré par la révolution d'un triangle équilatéral SAB autour de sa hauteur SO, et l'on désigne par R le rayon de la base de ce cône.

Par un point C de AB tel que $AC = x$ on mène un plan perpendiculaire au plan SAB et parallèle à SB ; il coupe le cercle de base suivant la corde MN et l'arête de SA en un point P ; on considère le triangle PMN.

1. Déterminer x de façon que l'angle MPN soit égal à $\dfrac{2\pi}{3}$.
2. Déterminer x de façon que la somme des carrés des trois côtés du triangle MPN soit égale à une quantité donnée a^2 ; discuter.

Paris, Série C

On donne deux circonférences de rayon R et $2R$ tangentes intérieurement. On mène par A, point de contact des deux circonférences, une droite faisant avec la ligne des centres OO' un angle aigu α. Elle coupe les circonférences aux points B et C qui se projettent en B' et C' sur la ligne des centres. On fait tourner la figure autour de OO'.

1. Calculer en fonction de R et de α l'aire latérale, l'aire totale et le volume du tronc de cône engendré par le trapèze $BCB'C'$.
2. En posant $y = \dfrac{3V}{?}$ et $\sin^2\alpha = x$, étudier les variations de y quand x varie de 0 à 1. Construire la courbe représentative des variations et ses tangentes aux points pour lesquels $x = 0$ et $x = 1$.

Paris, Série C

On donne un *angle* droit XOY, et à l'intérieur de cet angle un point A, on désigne par à et b ses distances AQ et AP à OY et OX. – Ce point A est le sommet d'un angle droit quelconque dont les côtés rencontrent OX en B et OY en C.

1. On pose $OB = x$, calculer BC en fonction de a, b et x.
2. Pour quelle position de l'angle BAC la longueur de BC est-elle minimum ?
3. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle OBC est-elle maximum ?

   Montrer que dans ce cas BC est perpendiculaire à OA.

Paris, Série C

Dans un triangle ABC donné, $BC = 2a$ et la médiane $AM = a$. On trace la hauteur AD et l'on pose $\widehat{AMB} = 2x$.

1. Dire la valeur de l'angle BAC ; ensuite calculer AB, AC, AD en fonction de a et de x.
2. Déterminer x de façon que $CD = 3.BD$.
3. On fait tourner la figure autour de la droite BC. Soient S_1 et S_2 les aires engendrées par les deux segments AB, AC et S l'aire d'une zone de hauteur égale à AD de la sphère de diamètre BC. Déterminer x de façon que $S_1 + \sqrt{3}S_2 = \lambda S$, λ désignant un nombre donné. – Discuter.

Application numérique. – Calculer x lorsque $\lambda = \sqrt{2}$.

(Une figure est donnée avec l'angle AMB aigu).

Poitiers

Représenter, par les méthodes de la géométrie cotée, un cube d'arête $a = 5$ unités, sachant qu'une de ses diagonales MN est parallèle au plan de projection et que le sommet le plus bas a pour cote *zéro* et se trouve dans le plan projetant MN.

Donner les cotes de tous les sommets.

N. B. – On nomme diagonale d'un cube toute droite joignant deux sommets n'appartenant pas à une même face.

Rennes

Sur un cercle de centre C et de rayon R, on marque deux points diamétralement opposés O et A. On mène par O une sécante OM faisant avec OA un angle égal à φ, coupant le cercle en M et la tangente en A en P.

1. Évaluer en fonction de R et φ les volumes engendrés en tournant autour du diamètre OA par le triangle OCM, par le secteur circulaire CAM, par le triangle OAP.
2. Évaluer en fonction de l'angle φ le rapport de l'aire engendrée par le segment OM à l'aire engendrée par l'arc AM, en tournant autour de OA.
3. Calculer φ pour que ce rapport soit égal à un nombre m donné. – Discussion.

Strasbourg

On considère une ligne brisée polygonale régulière $ABCD$ de 3 côtés, ayant chacun pour longueur a : on appelle α, l'angle extérieur au sommet de cette ligne polygonale.

Soit O le centre de la circonférence qui lui est circonscrite : évaluer en fonction de a et de α :

– Le rayon OA de cette circonférence ;

– L'angle au centre total AOD ;
– La longueur AD et l'angle de AD avec AB.

En regardant AD comme la somme géométrique des trois vecteurs AB, BC, CD, écrire le théorème des projections en projetant la figure sur la droite AB.

Vérifier par le calcul direct l'identité trigonométrique ainsi obtenue.

Généraliser le problème précédent au cas où la ligne brisée comprend un nombre quelconque n de côtés au lieu de trois seulement.

(Sur la figure, l'angle α est aigu).

Toulouse

Une sphère de centre O et de rayon R est tangente en A à un plan (P). Dans ce plan, on trace de A, comme centre, un cercle de rayon ρ. On désigne par (c) le cône ayant ce cercle pour base et le point O pour sommet.

Un plan (Q), perpendiculaire à OA en un point H situé entre O et A, coupe la sphère et le cône suivant deux cerckles.

1. Exprimer en fonction de R, ρ et de $AH = x$, la somme y des aires de ces deux cercles. Étudier la variation de y quand x varie de 0 à R.
2. Dans le cas particulier où $\rho = R$, calculer l'aire de la calotte sphérique intérieure au cône (c).

Problèmes de géométrie

Exercice n° 1

On donne deux points A et A' sur un cercle (O), et on considère les cercles (C) et (C') tangents au cercle (O) en A et A' et tangents entre eux au point M.

1. Lieu de leur point de contact M. Distinguer les parties du lieu d'après la nature des contacts.
2. Lieu des centres d'homothéties des cercles (C) et (C'). Distinguer les parties du lieu d'après la nature de l'homothétie.

Exercice n° 2

Soit un triangle isocèle ABC ($AB = BC$). Construire le foyer F de la parabole tangente en A et B aux côtés AC et BC. Lieu du point I, projection du foyer F sur AC, et enveloppe de la droite FI quand A et B restant fixes, le sommet C du triangle isocèle se déplace.

Exercice n° 3

Soit un cercle de diamètre AA' ; une tangente au cercle coupe en B et B' les tangentes dont les points de contact sont A et A' ; lieu du point de rencontre M des droites AB' et BA' lorsque la tangente BB' varie.

Exercice n° 4

On donne deux cercles tangents en A et un point P sur la tangente commune en A. Construire le point P', intersection des cercles qui passent par le point P et touchent les cercles donnés. Lieu du point P' lorsque le pôint P se déplace sur la tangente.

Exercice n° 5

On considère trois points A, B, C, e, ligne droite et les cercles décrits sur AB, BC et AC comme diamètres. Construire les cercles tangents à ces trois cercles. Alignements remarquables.

Exercice n° 6

Étant donné un triangle ABC, construire la conique tangente aux trois côtés et dont l'un des foyers est soit l'orthocentre, soit le centre du cercle inscrit.

À TRAVERS LES REVUES

Revue pédagogique (15, rue Soufflot, Paris). – S. JACQUEMART-FAURENS et A. JACQUEMART : *L'épreuve d'arithmétique au brevet élémentaire* (avril 1921, p. 283). – A. -G. : *Un modèle rustique d'équatorial* (juin 1921, p. 422). – F. PÉCAUT : *L'enfant et le nombre* (oct. 1921, p. 235). – Notes pédagogiques : *Faire souhaiter les théories d'arithmétiques avant de les aborder* (juin 1921, p. 439) ; *Sérier les difficultés : Polygones inscrits et circonscrits au cercle* (juin 1921, p. 441) ; *Recherches des facteurs premiers d'un nombre* (juillet 1921, p. 38) ; *Procédés d'exposition d'une démonstration géométrique* (juillet 1921, p. 39) ; *Sur les définitions de la multiplication d'un entier ou d'une fraction par un entier* (juillet 1921, p. 40) ; etc.

L'éducation mathématique (63, boulevard St-Germain, Paris) – *De la certitude mathématique* (15 novembre 1920, p. 41)

Bulletin de la Société mathématique de France . – H. LEBESGUE : *Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes* (T. XLIX, f. 2-3).

Bulletin des sciences mathématiques. – DELASSUS : *Sur le principe fondamental de la Mécanique analytique* (août 1921).

Scientia . – G. ARMELLINI : *Les comètes séculaires et le mouvement du soleil dans l'espace.* – H.-P. *Hudson* : *Constructions euclidiennes* (septembre 1921).

QUESTIONS À L'ÉTUDE

Prière de se reporter au *Bulletin* n° 22, pages 19 et 20.

1. MODIFICATIONS DES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Les membres de l'Association sont instamment priés de bien vouloir adresser à M. BIOCHE 56, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris VI^{e}, soit isolément, soit après entente, leurs réponses (reçu celles de MM. DECERF et SOURISSE) aux questions suivantes :

Quels sont les changements qu'il pourrait être à propos d'effectuer dans la répartition des matières entre les diverses classes ?

Quelles sont les modifications qu'on pourrait proposer pour l'organisation générale de l'enseignement ?

Il est bien entendu que ce questionnaire n'est pas limitatif.

2. UNIFICATION DES DÉFINITIONS DES MOTS ET DES NOTATIONS MATHÉMATIQUES

Faire parvenir les communications soit au bureau, soit au rapporteur, M. FLAVIEN, Lycée Henri-IV, Paris V^{e}. Reçu depuis le dernier *bulletin* celles de MM. LHERMITTE, ROBY et SANSELME.

3. ADMISSIBILITÉ AU BACCALAURÉAT

Le *bulletin* n° 21, à l'occasion d'un vœu présenté au Conseil Académique de Paris, invitait les membres de l'Association à donner leur avis *sur la limitation à la session ordinaire – exclue – de juillet de l'année suivante du bénéfice de l'admissibilité aux examens oraux du baccalauréat, 1re et 2^{e} parties.*

Des communications sur ce sujet ont été envoyées, depuis le dernier *Bulletin*, par MM. SOURISSE et WELL. Prière d'adresser les réponses à M. BIOCHE 56, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris VI^{e}.

COURS ET CONFÉRENCES

L'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg assure d'une façon complète la préparation à l'*Agrégation des Sciences Mathématiques* par ses conférences du jeudi qui, chaque semaine, portent alternativement sur la mécanique ou l'analyse, d'une part, et sur les Mathématiques élémentaires ou les Mathématiques Spéciales, d'autres part.

La préparation au *Diplôme d'études supérieures* (et aux deux *Doctorats*) est aussi facilitée par l'existence de nombreux cours de recherches sur des sujets variés.

Pour de plus amples renseignements, s'adresser à M. Fréchet, Professeur, Directeur de l'Institut de Mathématiques de Strasbourg.

N. B. – Contrairement à certaines informations les candidats aux diverses bourses d'État peuvent indiquer leurs préférences pour Strasbourg aussi bien que pour toute autre Université.