

Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ?

RICHARD CHOULET
Lycée Augustin Fresnel, Caen

*À Françoise, qui comprend difficilement
que je n'ai pas le temps de faire le ménage.*

Introduction

Relecteur d'un article pour notre association qui entrevoyait une généralisation du nombre d'or par l'introduction de nombres dits « métalliques », je me suis intéressé à ce qu'en proposait l'internet et j'ai trouvé toute une alchimie pour laquelle il est nécessaire d'y voir clair. En particulier les candidats au titre de nombre d'argent se bousculent et le vocabulaire est fluctuant. Afin d'apporter mon lingot à l'édifice et peut-être de dégager un critère pertinent (?), j'ai voulu y mettre mon grain de sel et surtout pratiquer un peu de mathématiques à l'occasion de tel ou tel choix fait par l'utilisateur du mot. Faisons donc notre plein de friandises à travers ce marché pittoresque.

1. Les boutiques d'argenterie ne manquent pas

1. Un premier boutiquier nous propose — je ne pense pas que cela soit de la contrebande mais il y a quand même beaucoup trop de produits — des nombres d'argent : « nombre positif (c'est moi qui dis positif) égal à son inverse plus lui-même ». Cette définition est du toc, le commerçant voulant dire que l'on cherche les nombres $S(n)$ (sans doute que n est entier) tel que $S(n) = n + 1/S(n)$.

Adresse de l'auteur : 27 rue du Quatre Août, F - 14 210 Avenay, France ;
courriel : richardchoulet@yahoo.fr.

Texte de l'atelier présenté lors du Congrès de la SBPMef à Mons, le 22 août 2007.

D'abord, il est singulier que le nombre d'or soit ramené au rang d'un vulgaire nombre d'argent. Ensuite l'équation qui régit ces nombres n'est que du second degré $x^2 - nx - 1 = 0$ (c'est d'un banal!); on a sa valeur $\Psi_n = \frac{1}{2} (n + \sqrt{n^2 + 4})$. Il n'est pas indiqué que n soit exclusivement entier, mais c'est mieux si l'on veut faire des fractions continuées et cela donne alors ce résultat gentillet : $\Psi_n = [n; \overline{n}]$; remarquons que Ψ_1 est le nombre d'or. Bref, tout ce qui est rare étant cher... je dirais que ce n'est pas cher mais on peut s'amuser avec cette bimbeloterie et au moins, ça a le mérite d'exister.

2. En sillonnant ce dédale, j'ai aussi trouvé un magasin qui proposait (it was en étranger) de la *constante d'argent* comme la plus grande solution réelle positive de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ en fait $2 + 2 \cos \frac{2\pi}{7} = 3,246\,979\,603\dots$; il y avait là un petit côté aguicheur car il était écrit en grand que « it is the seventh Beraha number » ce qui ne pouvait manquer d'attirer nombre de touristes en mal d'exotisme. On n'achète certes pas un c'at dans une pouc' as said my mother mais voici quelques petits souvenirs. Le n -ième nombre de Beraha est $\mathcal{B}(n) = 2 + 2 \cos \frac{2\pi}{n}$. Dans cette terminologie $\mathcal{B}(5)$ est le nombre $\Phi + 1$, $\mathcal{B}(7)$ est la constante d'argent du boutiquier et $\mathcal{B}(10) = \Phi + 2$. Cela se tient. Il y a même plus drôle, de quoi se tordre : en notant $\alpha = \sqrt[3]{7 + 7\sqrt[3]{7 + 7\sqrt[3]{7 + \dots}}}$, ce qui veut dire en fait $\alpha \geq 0$ et $\alpha^3 = 7\alpha + 7$, on trouve :

$$\mathcal{B}(7) = 2 + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} = 3 + \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Détaillons : d'abord la notation avec radicaux superposés *ad libitum* sous réserve que cela ait un sens et c'est un problème de limite, veut dire que $\alpha^3 = 7 + 7\alpha$ en élevant au cube où α est évidemment positif ($\alpha = 3,04891\dots$).

Le deuxième point consiste à démontrer que le nombre positif $2 + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$ est bien solution de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$. Le numérateur du quotient obtenu à gauche en remplaçant est :

$$(3\alpha + 4)^3 - 5(\alpha + 1)(3\alpha + 4)^2 + 6(\alpha + 1)^2(3\alpha + 4) - (\alpha + 1)^3 = -\alpha^3 + 7\alpha + 7 = 0$$

ce qui assure le résultat.

2. Où je dénêche du sérieux

Dans cette troisième échoppe, la définition possible prolonge l'idée de la définition du nombre d'or et se trouve donc avoir une interprétation géométrique ([18]).

Ce nombre d'argent apparaît comme un quotient : plus précisément dans le partage d'un segment unité en trois segments de longueurs respectives a, b et c , la section est « argentée » si et seulement si le nombre $\Psi_2 = \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ vérifie : $\Psi_2^3 = \Psi_2^2 + \Psi_2 + 1$.

En souvenir du nombre d'or, solution positive de l'équation $x^2 = x+1$, on pourrait appeler nombre métal d'ordre m la solution positive de l'équation $x^m = x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1$ (lorsque m est pair il y a une autre solution réelle). Pour $m = 2$, c'est le nombre d'or noté Φ_2 ; pour $m = 3$, on rencontre la dénomination de nombre d'argent et on le note Φ_3 . Au-delà de 3, le tableau de MENDELEÏEV n'y suffira pas, donc arrêtons les qualificatifs. D'ailleurs au passage, si on est tenté de poursuivre avec le bronze, le bronze n'est pas un métal.

Nous avons les valeurs $\Phi_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$ et

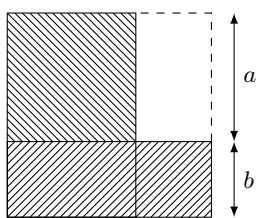
$$\Phi_3 = \sqrt[3]{\frac{19 + 3\sqrt{33}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{19 - 3\sqrt{33}}{27}} + \frac{1}{3} = 1,839\ 286\ 755\ 214\ 16\dots;$$

d'autre part, signalons les développements en fractions continues de ces deux nombres. En ce qui concerne le nombre d'or, c'est facile à obtenir puisque $\Phi_2 = 1 + \frac{1}{\Phi_2}$ permet en réitérant d'avoir $\Phi_2 = [1; 1; 1; 1; \dots]$ dont les réduites successives sont les quotients des nombres de la suite de FIBONACCI usuelle : $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$

Quant au nombre Φ_3 , on obtient $\Phi_3 = [1; 1; 5; 4; 2; 305; 1; 8; 2; 1; 4; 6; \dots]$, qui donne pour premières réduites :

$$1, 2, \frac{11}{6}, \frac{46}{25}, \frac{103}{56}, \frac{31\ 461}{17\ 105}, \frac{31\ 564}{17\ 161}, \frac{694\ 305}{377\ 486}, \dots$$

Géométriquement on peut faire un parallèle entre or et argent comme l'illustrent les figures suivantes.



Les parties hachurées ont même aire lorsque :

$$x = \frac{a}{b} = \Phi_2,$$

puisque $a^2 = ab + b^2$ se traduit par :

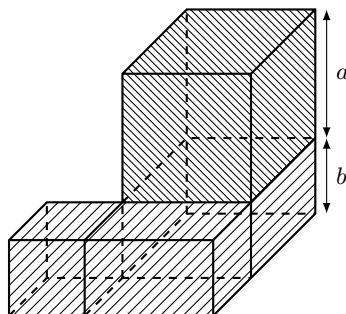
$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Les parties hachurées ont même volume lorsque :

$$x = \frac{a}{b} = \Phi_3,$$

puisque $a^3 = a^2b + b^2a + b^3$ se traduit par :

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$



3. À nous les trésors !

3.1. Un magasin de plus ?

Dans ce magasin, au demeurant bien achalandé ([16]), est appelé *nombre d'argent* (ou constante de plastique ou encore nombre de plastique — là ça fait un peu déchetterie—) la solution positive de l'équation $x^3 = x + 1$. On peut se dire en entrant que ce sera un peu comme ailleurs mais là on se trompe lourdement. Certes laisser tomber le x^2 par rapport au paragraphe précédent n'est pas très révolutionnaire. Et pourtant jugez-en plutôt.

Cette équation est l'équation caractéristique des suites satisfaisant la récurrence linéaire $\mathcal{R} : u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.
 Il y a deux suites répertoriées vérifiant \mathcal{R} .
 La suite de PADOVAN P_a ([11]) pour laquelle $u_0 = u_1 = u_2 = 1$; elle commence donc par : 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, ... et a pour fonction génératrice $x \mapsto \frac{1-x^2}{1-x^2-x^3}$.

La deuxième suite est la suite de Perrin P_e pour laquelle $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$; elle commence par : 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, ... et a pour fonction génératrice $x \mapsto \frac{3-x^2}{1-x^2-x^3}$.

La suite fondamentale qui satisfait \mathcal{R} pour tout entier, est, quant à elle, définie par $G_p = 0$ pour tout $p \leq 0$, $G_1 = 1$, ce qui fait que les premières valeurs en sont : 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, ... autrement dit une translatée de la suite de PADOVAN.

Plus précisément, chacune des suites précédentes s'écrit à l'aide de 3 termes consécutifs de la suite fondamentale et ainsi obtient-on pour tout entier n :

$$P_a(n) = G_{n+2} + G_{n+1} = G_{n+4} \quad \text{et} \quad P_e(n) = 3G_{n+1} - G_{n-1}.$$

Ce nombre d'argent Ψ est égal à

$$\frac{(9 - \sqrt{69})^{1/3} + (9 + \sqrt{69})^{1/3}}{2^{1/3}3^{2/3}} = 1,324\,717\,95\dots = [1; 3; 12; 1; 1; 3; 2; \dots].$$

Un intérêt de la définition donnée de ce nombre réside dans le résultat suivant : il n'y a que deux nombres réels $x > 1$ pour lesquels existent des entiers naturels k et l satisfaisant à :

$$\begin{cases} x + 1 = x^k \\ x - 1 = x^{-l} \end{cases};$$

ces deux nombres sont le nombre d'or et ce nombre d'argent.

Le nombre d'or Φ vérifie : $\begin{cases} \Phi + 1 = \Phi^2 \\ \Phi - 1 = \Phi^{-1} \end{cases}$ et le nombre d'argent Ψ est tel que : $\begin{cases} \Psi + 1 = \Psi^3 \\ \Psi - 1 = \Psi^{-4} \end{cases}$. La démonstration faite par AARTS date de 2001 (voir [2]). Le problème est de démontrer que le système $\begin{cases} x^k - x - 1 = 0 \\ x^{l+1} - x^l - 1 = 0 \end{cases}$ n'a qu'une seule solution réelle si et seulement si $(k; l) \in \{(2; 1), (3; 4)\}$.

3.2. Voici le principe de la démonstration

1. Tout d'abord SELMER [8] démontre en 1956 que le trinôme $X^n - X - 1$ (où $n \geq 3$) est irréductible c'est-à-dire ne peut s'écrire comme un produit non trivial de polynômes à coefficients entiers.
2. Ce résultat est complété en 1960 par TVERBERG [10] sous la forme : tout trinôme $X^m \pm X^k \pm 1$ ($m \geq 3$ et $1 < k < m$) est soit irréductible

soit un produit de deux polynômes. Dans ce dernier cas la factorisation peut être arrangée de telle sorte que le premier soit irréductible (voire constant) et le deuxième *n'ait que des zéros de module 1*.

3. En particulier lorsqu'on s'intéresse à $X^m - X^{m-1} - 1$ ($m \geq 3$), il est soit irréductible, soit un produit de polynômes où figure obligatoirement $X^2 - X + 1$.

En effet de $|x|^{m-1} = \frac{1}{|x-1|}$, vient que si le polynôme n'est pas irréductible, ses zéros de module 1 d'après (2), sont $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ce qui montre que le polynôme est divisible par $X^2 - X + 1$.

4. Soit k et l entiers. Pour $k = l + 1 = 2$, $X^k - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ sont égaux ; seul Φ est solution des deux équations associées.

Supposons donc $k \geq 3$ ou $l \geq 2$. Comme $X^k - X - 1$ est irréductible, un facteur commun à $X^k - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ ne peut venir que du résultat : le premier polynôme divise le second. Ceci signifie que :

$$X^{l+1} - X^l - 1 = (X^2 - X + 1)(X^k - X - 1).$$

En développant on voit immédiatement que ce résultat n'intervient que si et seulement si $l = 4$ et $k = 3$; la solution positive commune aux deux équations est bien le nombre d'argent Ψ . ■

Ce nombre d'argent devient une perle du point de vue suivant : c'est le plus petit nombre de PISOT-VIJAYARAGHAVAN. Qu'est-ce qu'un nombre de PISOT-VIJAYARAGHAVAN ? C'est un entier algébrique positif plus grand que 1 dont tous les conjugués sont de module inférieur ou égal à 1 (donc ici 1 d'après TVERBERG). Ce résultat est dû à SIEGEL (1944).

Remarque expérimentale : Ayant programmé le calcul du résultant (voir par exemple [4]) de $X^2 - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ pour essayer d'y voir un peu clair, avant de trouver les documents salvateurs, j'ai constaté (attention je n'ai pas dit démontré) que ces résultants successifs, suivant $l \geq 1$, donnaient au signe près la suite 0, 1, 1, 4, 5, 11, 16, 29, 45, ... Autrement dit se trouvait définie la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (A001350 chez [17]) pour laquelle (quantificateurs adéquats)

$$u_{2p+3} = u_{2p+2} + u_{2p+1}$$

et

$$u_{2p+4} = u_{2p+3} + u_{2p+2} + 2$$

avec $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 4$. On pourrait suivant la parité de n donner l'expression de u_n , mais en fait la récurrence est d'ordre 4 :

$$u_{n+4} = u_{n+3} + 2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$$

pour tout n . Le polynôme caractéristique est : $X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$ soit encore $(X^2 - X - 1)(X^2 - 1)$. On obtient alors après quelques calculs :

$$u_n = \Phi^{n-1} + \Phi^{-(n-1)} - 1 + (-1)^n.$$

Plus fort : le résultant de $X^3 - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ ($l \geq 1$) est le l^{e} terme de la suite $-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 5, 1, 7, 8, 5, 19, 11, 23, 35, \dots$ (A001945 chez [17]) définie par la récurrence

$$u_{n+6} = -u_{n+5} + u_{n+4} + 3u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$$

de polynôme caractéristique :

$$X^6 + X^5 - X^4 - 3X^3 - X^2 + X + 1 = (X^3 - X - 1)(X^3 + X^2 - 1).$$

Enfin avec $X^4 - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ ($l \geq 1$) c'est le trou noir. Pour les aficionados de la chose cela commence par : $-1, 1, 1, 7, 1, 1, 1, -1, -1, -7, -16, -13, -17, -59, -67, -49, -131, -239, -191, -269, -625, \dots$ qui ne m'évoque rien. Aurait-on $X^4 - X - 1$ en facteur dans le polynôme caractéristique ? Ce serait bien mais l'histoire ne le dit pas !

4. Or-Fibonacci, argent-Padovan : même combat !

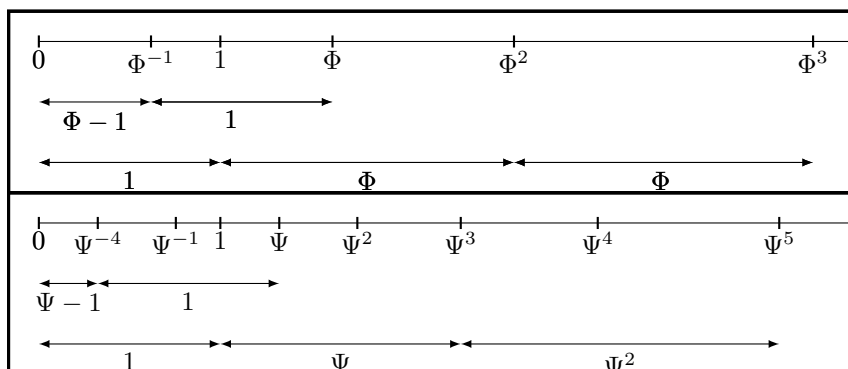
4.1. Système de mesures

Nous avons vu l'origine commune des nombres d'or Φ et d'argent Ψ comme seules solutions d'un système d'équations ; ce système a une source géométrique.

Appelons système de mesures associé au réel $q > 1$ la suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Si l'on considère cette échelle pour mesurer des longueurs de segments, deux conditions de compatibilité sur ce système doivent être satisfaites. Tout d'abord, en juxtaposant deux segments de mesure consécutive

q^k et q^{k+1} , on obtient un nouveau segment dont la mesure est un certain q^m ($m = k + 2$ avec $q = \Phi$ ou $m = k + 3$ avec $q = \Psi$). D'autre part en superposant deux segments de mesure q^{k+1} et q^k on obtient un nouveau segment « différence », dont la mesure doit être un certain q^n . On voit ainsi que cela se ramène, par équivalences au problème posé.

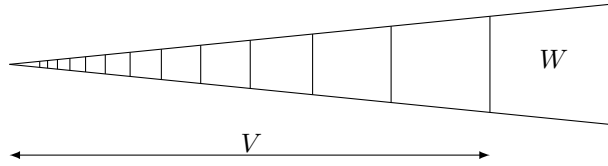
Ce qu'on a dit au paragraphe précédent montre donc qu'il n'y a que deux systèmes de mesures possibles. Le schéma ci-dessous illustre chacune des situations $q = \Phi$ et $q = \Psi$.



4.2. Rappel sur la notion de gnomon

Si, étymologiquement, gnomon évoque l'idée de mesure du temps par un bâton planté en terre pour repérer l'ombre qu'en laisse le soleil, a coexisté également du point de vue numérique chez les Grecs, cette idée que le gnomon est le truc qu'il faut ajouter pour que ça reste pareil : $2n + 1$ est gnomon du carré n^2 puisque la somme donne $(n + 1)^2$ qui est encore un carré. D'ailleurs on arrive rapidement à la même idée géométrique puisque n^2 est l'aire du carré de côté n tandis $2n + 1$ est l'aire de l'équerre bordant ce carré pour faire un nouveau carré.

D'où cette définition plus moderne de gnomon en géométrie euclidienne (plane ici) qu'une figure W est gnomon de V pour traduire qu'existe une similitude de $W \cup V$ vers V de rapport λ avec $0 < \lambda < 1$: par exemple (non trop évident) une situation de Thalès avec des parallèles bien choisies telles que l'offre le schéma suivant :

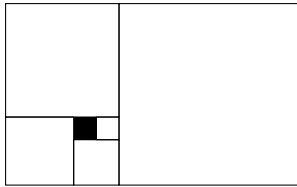


Cette configuration de gnomons en cascade rappelle la disposition des barrettes sur certains instruments de musique (guitare, ...) puisqu'il y a, à la clé, des suites géométriques.

On peut imaginer sans peine qu'il y a une condition structurelle qui lie gnomon et forme associée et qu'on ne peut faire n'importe quoi.

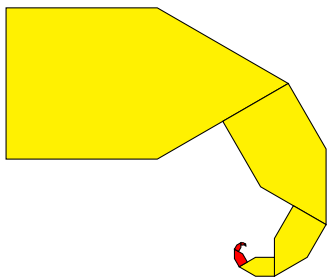
Plus précisément, sur une conjecture de GAZALÉ ([4, p. 143]), AARTS a démontré ([1]) que dans le cas où l'on suppose W polygone convexe (avec un nombre fini de côtés par définition), celui-ci a au maximum six côtés. Lorsque le polygone est supposé de plus régulier, W ne peut être qu'un *triangle équilatéral ou un carré*. Mézalar quelles formes peut-on associer ? Sous la condition de finitude, il n'y a que deux cas possibles. La variété ne manque pas dans le cas où l'ensemble comprend une infinité de côtés ou lorsqu'on n'impose plus de prendre un gnomon régulier comme l'illustrent les dessins de la p. 12.

4.3. Rectangle doré : Premier gnomon polygone convexe régulier

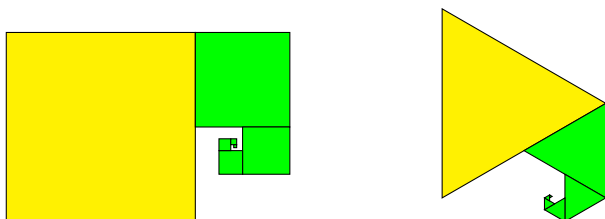


Dès que l'on complète un rectangle par un carré et que l'on recommence *ad libitum*, il y a de la suite de FIBONACCI dans l'air.

Dans le dessin ci-contre, on part du carré noir de côté 1 ; les carrés successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Ce sont les nombres de la suite de FIBONACCI $F^{(2)}$ qui satisfait la récurrence $F_{n+2}^{(2)} = F_{n+1}^{(2)} + F_n^{(2)}$. On sait que les quotients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'or $\Phi = 1,618\dots$ Nous ne sommes pas ici dans la situation de figures semblables contrairement au cas connu du rectangle d'or ou plus exactement de la



Une des pinces d'or du crabe ?



Spécimens de Scorpionibus à poils ras

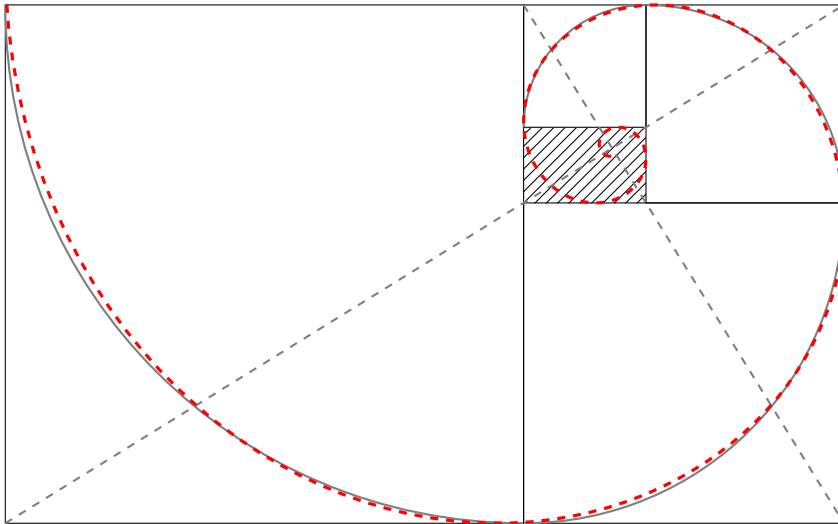
cascade des rectangles d'or comme il suit.

Les coordonnées de ω , intersection des droites en pointillés, dans le repère orthonormal pour lequel les coordonnées de a sont $(\Phi, 0)$ et celles de b sont $(0, 1)$, ou encore $\left(\frac{2\Phi + 1}{\Phi + 2}, \frac{2\Phi + 1}{3\Phi + 1}\right)$. Classiquement, pour illustrer la spirale d'or, on inscrit dans les carrés, des quarts de cercle « qui se raccordent bien ».

Un peu de maths expérimentales : voici la ligne de calculs en \LaTeX donnant la spirale logarithmique inscrite dans les rectangles dorés (en pointillés) :

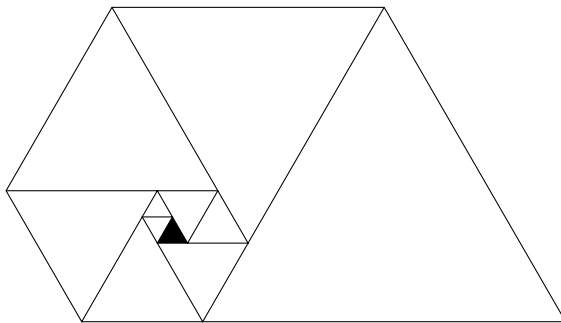
```
\parametricplot[plotpoints=1000,linewidth=0.5mm,linecolor=black]{-355}{1000}
{12.03738 t 159 add cos 2.7182818284 -0.00538 t mul exp 1.85 mul mul add
7.43951 t 159 add sin 2.7182818284 -0.00538 t mul exp 1.85 mul mul add}
```

En clair l'équation polaire (d'origine ω) qui a servi au tracé est : $\varrho = 1,85 \times e^{-0,00538(t+159)}$, t en degrés entre -355 et 1000 . On voit d'ailleurs que la fatigue de la recherche d'une spirale plus onctueuse n'était pas loin d'être vaine, car les cercles font fort bien l'affaire (fig. p. 13).



4.4. Pentagone d'argent : Second gnomon polygone convexe régulier

La situation géométrique abordée maintenant est à mettre en parallèle avec le 3. qui précède, et l'introduction de la suite de FIBONACCI.



En partant du triangle équilatéral noir de côté 1, les triangles successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, ... Ce sont les nombres de la suite de PADOVAN P_a qui satisfait la récurrence $P_a(n+1) = P_a(n-1) + P_a(n-2)$. Les quo-

tients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'argent $\Psi = 1,324717\dots$

Suit maintenant une figure d'argent : on part d'un pentagone particulier (celui hachuré où apparaît ω) puisqu'il a quatre angles de 120° et un de 60° tandis que ses côtés, dans l'ordre approprié aux angles, sont proportionnels à $\Psi, \Psi^2, \Psi^3, \Psi^4$ et Ψ^5 . En accolant dans le sens indirect, comme il est clair sur la figure, un triangle équilatéral, on obtient un nouveau pentagone semblable au premier dans le rapport Ψ et ainsi de suite. On peut faire de même dans le sens direct dans le rapport inverse ce qui n'a pas été entrepris ici pour avoir une lecture plus aisée. On conçoit facilement la convergence des pentagones (??) vers le point ω .

Les coordonnées de ω autour duquel s'ordonne ce bel agencement, dans le repère orthonormal pour lequel les coordonnées de a sont $(\Psi; 0)$ et celles de b sont $\left(-\frac{\Psi^2}{2}; \frac{\Psi^2\sqrt{3}}{2}\right)$, ou encore $\left(\frac{\Psi^2+3\Psi+1}{2\Psi+4}; \frac{(\Psi^2+\Psi)(\Psi^2+3\Psi+1)\sqrt{3}}{(2\Psi+4)(\Psi^2+\Psi+2)}\right)$. Notons en pointillés les droites privilégiées d'écart angulaire 60° , sur lesquelles se trouvent tous les sommets considérés.

J'aurais bien aimé trouver l'équation de la jolie spirale de la p. suivante (qui joue le rôle de la spirale d'or dans le cas évoqué ci-dessus du rectangle d'or et de ses semblables), pour notre situation du pentagone d'argent, mais je me suis contenté de prendre une spirale logarithmique sous forme approchée pour le schéma. Le problème, dans la recherche de l'exacte équation, c'est que son centre, doit être ω et alors là, ô mes gars, ça craint ! Serez-vous heureux si je vous écris que

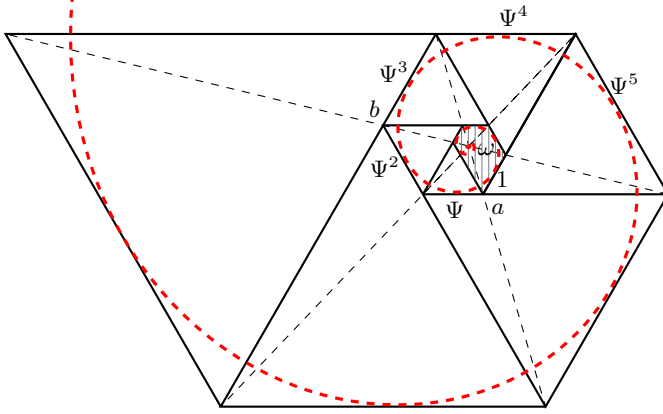
$$\begin{cases} x = 1,01197 + 1,666666 \cos(t + 159)e^{-0,004792t} \\ y = 1,0626566 + 1,666666 \sin(t + 159)e^{-0,004792t} \end{cases}$$

avec t en degrés ?

5. Encore une question

On a vu dans le paragraphe précédent qu'on devait avoir dans chacun des cas envisagés : $q^k + q^{k+1} = q^m$ et $q^{l+1} - q^l = q^{-m}$ pour avoir un système de mesures ; mais quelles sont donc les \mathbf{Z} -combinaisons linéaires de q et de 1 qui donnent les puissances entières de q ?

Je vais détailler le cas de $q = \Phi$; l'autre est certes un peu plus compliqué mais pas trop.



On doit revenir pour cela à l'écriture du terme général F_n ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ...) de la suite de FIBONACCI (respectivement de PADOVAN) à l'aide du nombre d'or Φ et de son conjugué dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$; cela nécessite quelques aménagements pour pouvoir passer aux exposants entiers relatifs. Si l'on veut définir la suite sur les nombres négatifs avec évidemment la même relation de récurrence et recoller aux indices positifs « en venant de $-\infty$ », la suite doit vérifier $F_{-(n+2)} = -F_{-(n+1)} + F_{-n}$ ($n > 0$) pour atteindre de la sorte les indices négatifs.

Il en résulte qu'on n'a pas le choix : $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. En notant $\mathcal{A} = \{\Phi^n, n \in \mathbf{Z}\}$, on obtient ainsi que pour tout entier n de \mathbf{Z} :

$$F_n + F_{n+1}\Phi \in \mathcal{A}.$$

Pour ce qui est du cas $q = \Psi$, on note P_a la suite de PADOVAN. On la définit sur les entiers négatifs de la manière qui suit. Notons $P_a(n) = a_{-n}$ pour $n < 0$. La suite a est définie par récurrence par $a_{-n-3} = -a_{-n-2} + a_{-n}$, autrement dit le polynôme caractéristique de cette suite est $X^3 + X^2 - 1$ c'est-à-dire le polynôme réciproque de $X^3 - X - 1$, caractéristique de la suite de PADOVAN. En allant vers les négatifs donc en commençant à l'indice -1 vu la définition qu'on a prise de la suite de PADOVAN : $0, 1, 0, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 2, -2, 1, 1, -3, 4, -3, \dots$

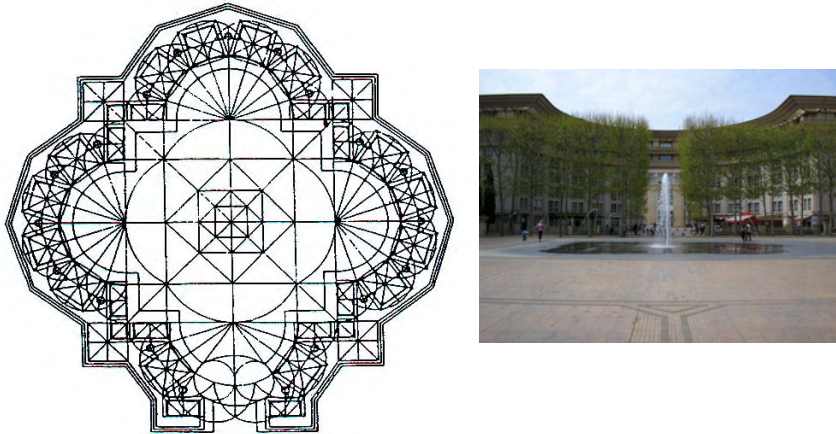
En notant $\mathcal{B} = \{\Psi^n, n \in \mathbf{Z}\}$, on obtient de même que pour tout entier n de \mathbf{Z} :

$$P_a(n-5) + P_a(n-3)\Psi + P_a(n-4)\Psi^2 \in \mathcal{B}.$$

6. Tourisme méconnu pour les arts

6.1. Le nombre d'or à Montpellier

Il y a, paraît-il du nombre d'or partout : dans les Pyramides chez certains visionnaires à retardement, au Parthénon, dans les tableaux de la Renaissance, plus sûrement chez MONDRIAN, dans les fleurs de tournesols (voir le bon article mais ardu [3]), ... et on en a écrit des volumes. Il faut dire que le long travail du temps a permis d'en arriver là. Voici un petit bijou ciselé à Montpellier.



L'ensemble architectural Antigone à Montpellier, réalisé par Ricardo BO-FILL, présente explicitement la référence au nombre d'or puisqu'en son sein existe « La Place du Nombre d'Or », dont est joint le plan. Il est dit dans les documents qu'on peut se procurer dans cette superbe ville du midi, sur l'ensemble lui-même :

Par le jeu d'interpénétration du carré et du cercle, des espaces et des bâtiments aux proportions harmonieuses sont créés : Une géométrie de base a été définie pour engendrer une succession d'espaces sur l'axe, en même temps que le tissu urbain du quartier ; la maille est construite à partir d'un carré de 48 m de côté. De ce carré est déduit le rectangle d'or avec les arcs de cercle qui lui correspondent. La répétition de ce principe constitue le tracé-régulateur d'Antigone et définit la configura-

tion des places, les axes des rues, leurs dimensions et les rythmes des façades.

Un peu plus loin est détaillée la réalisation proprement dite de la place du nombre d'Or :

Située en tête du quartier d'Antigone et près du centre historique, cette place doit son nom à la formule mathématique du nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ utilisée pour donner aux bâtiments, espaces publics, sculptures ou monuments des proportions particulièrement harmonieuses.

Ce principe harmonique a été appliqué pour concevoir tout le plan masse d'Antigone et naturellement pour la conception de cette place tant pour son tracé, que pour le dessin des façades et les détails des bâtiments. (...) L'ensemble du Nombre d'Or a une allure monumentale :

- D'immenses colonnes accueillent les escaliers à certains angles des immeubles,*



- Les deux derniers étages, en avancée par rapport aux bâtiments, sont soulignés par d'épais balcons dont les bordures sont utilisées en jardinières,*
- Une frise gigantesque se détache en porte-à-faux au sommet de l'immeuble et crée sur la Place des jeux d'ombre et de lumière. (...)*

Les terrasses des restaurants et des cafés permettent aux montpelliérains de se rencontrer et de vivre la Place au rythme des heures et des saisons : promenade, marché, concerts, spectacles, concours d'échecs entre résidents et jeux des enfants... , par toutes ces activités la place du Nombre d'or devient naturellement une agora.

6.2. Le nombre d'argent : La petite histoire de la transmutation du plastique

6.2.1. L'histoire, les personnages

Le point de départ théorique est l'introduction du nombre de plastique par le moine architecte Hans VAN DER LAAN ([5]).

Dans l'avant-propos à l'ouvrage, de la main du traducteur je lis « Qui-conque abordera l'étude des textes qui suivent regrettera peut-être de n'y trouver aucune illustration, aucune anecdote, aucun exemple frappant. C'est délibérément que l'auteur a voulu que fût gardée à ses démonstrations toute leur austérité première, afin qu'aucune diversion ne vienne interrompre le fil d'une démonstration serrée, et que ne s'égaré pas à mi-chemin, par des applications prématurées, le vrai labeur d'une réflexion personnelle. »

Le lecteur que je fus n'a pas été pris en traître ; mais heureusement il y a un schéma parmi quelques-uns, qui m'a permis de comprendre la substantifique moelle, dont les pages d'écriture en un très bon français par ailleurs, n'avaient pas réussi à me donner une idée claire. J'ai redessiné le schéma avec mes annotations qui remplaceront donc avantageusement les pages dans lesquelles mon cerveau eut peine à voir quelques lueurs.

La relation fondamentale $\Psi^3 = \Psi + 1$ donne :

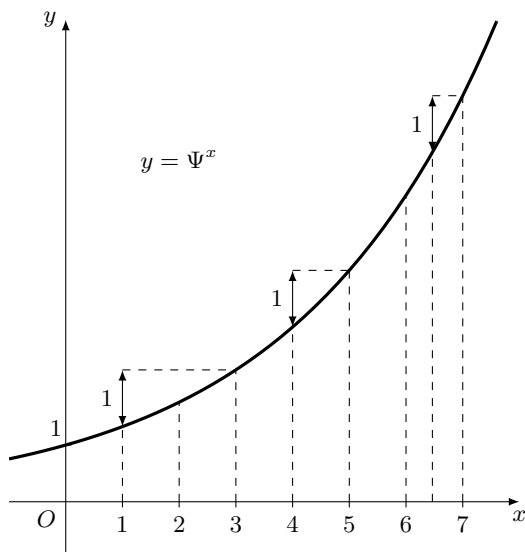
$$\begin{aligned}\Psi^5 &= \Psi^4 + 1, \\ \Psi^7 - 1 &= 2\Psi^4 = \Psi^\alpha, \\ \alpha &= 4 + \frac{\ln 2}{\ln \Psi} = 6,464\,96\dots,\end{aligned}$$

mais aussi :

$$\Psi - 1 = \Psi^{-4}.$$

En ce qui concerne les écarts successifs, on a pour tout entier relatif n :

$$\Psi^{n+1} - \Psi^n = \Psi^{n-4}.$$

FIG. 1 – Illustration de quelques relations sur Ψ

D'ailleurs, plus généralement les relations précédentes génèrent que pour tout entier relatif n : $\Psi^{n+3} = \Psi^{n+1} + \Psi^n$ ainsi que $\Psi^{n+7} - \Psi^n = 2\Psi^{n+4} = \Psi^{\alpha_n}$, qui est aussi la moyenne harmonique entre Ψ^{n+7} et Ψ^{n+6} , et définit $\alpha_n = n + 4 + \frac{\ln 2}{\ln \Psi}$.

En liaison avec ce nombre de plastique, qui n'est jamais cité comme je l'ai formulé dans [5], VAN DER LAAN a construit des tableaux de valeurs indiquant des rapports harmonieux selon son nombre, entre diverses parties d'un tout. Si j'ai bien compris l'affaire, en fait on peut ramener cela, à la découverte raisonnée qu'il fit de valeurs approchées des premières puissances de Ψ par des entiers, voire des rationnels simples. Il écrit ainsi p. 63 « Pour arriver à établir la relation du nombre plastique avec le nombre abstrait, voyons d'abord comment s'expriment par le nombre discret le rapport fondamental, et ensuite, tous les autres rapports entre mesures d'un système », ce qui lui permet p. 66 de compléter par « Voici la série complète de ces nombres. Ils expriment, pour chaque mesure, le rapport de celle-ci avec le petit élément considéré comme unité ». C'est ainsi que je construis en remettant tout bout à bout le tableau synthétique de la p. 20.

Tableau de valeurs

Valeurs exactes	1	Ψ	Ψ^2	Ψ^3	Ψ^4	Ψ^5	Ψ^6	Ψ^7
Valeurs approchées à 10^{-3}	1	1,325	1,755	2,325	3,080	4,080	5,404	7,159
Rapports donnés par Dom VAN DER LAAN	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{3}$	3	4	?	7
Nom donné par celui-ci	Petit élément	Grand élément	Petit fragment	Grand fragment	Petite partie	Grande partie	Petit tout	Grand tout
Valeurs approchées	1	1,333	1,75	2,333	3	4	?(*)	7

Valeurs exactes	Ψ^{-7}	Ψ^{-6}	Ψ^{-5}	Ψ^{-4}	Ψ^{-3}	Ψ^{-2}	Ψ^{-1}	1
Valeurs approchées à 10^{-3}	0,140	0,185	0,245	0,325	0,430	0,570	0,755	1
Rapports donnés par Dom VAN DER LAAN	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$	1
Valeurs approchées d'icelles	0,143	0,2	0,25	0,333	0,429	0,571	0,75	1

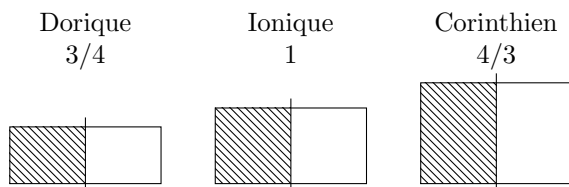
(*) Dans [6], VAN DER LAAN écrit « Reste le petit tout, qu'il est malaisé d'exprimer par un nombre ». En fait p. 139, il prend $5\frac{1}{3}$. Les rapports paraissent grossiers mais, en passant à des valeurs numériques illustrant ainsi le nombre plastique, il construit des tableaux de correspondance nettement plus précis, où surgissent clairement des suites... de PADOVAN. Voici recomposé un extrait de la p. 77 de [5].

Système	Petit élément	Grand élément	Petit fragment	Grand fragment	Petite partie	Grande partie	Petit tout	Grand tout
I	100	132,5	175,5	232,5	308	408	540,5	716
II	14	18,5	24,5	32,5	43	57	75,5	100
III	2	2,5	3,5	4,5	6	8	10,5	11

Un peu plus loin ([5, p. 99]), VAN DER LAAN établit une comparaison entre l'architecture grecque et le nombre plastique : « Quoi qu'il en soit (fait référence aux affirmations d'un auteur, A. CHOISY, à propos de VITRUVÉ), nous pouvons nous servir de l'expression propre à chacun des trois ordres classiques pour caractériser mieux encore les trois rapports qui constituent le noyau du nombre plastique.

Le rapport fondamental ($4/3$) exprimerait dès lors la force dorique, le rapport amplifié ($7/4$) la grâce ionienne, et le rapport extrême ($7/3$), l'ingénuité corinthienne. Il y a donc quelques analogies entre les trois rapports, d'une part, — qui sont au centre du nombre plastique — et les trois ordres classiques, d'autre part, — qui résument toute l'architecture antique ».

On rappelle les configurations de l'architecture classique avec les rapports entre la hauteur et la demi-largeur des chapiteaux ; il y a précise VAN DER LAAN « une gradation qui correspond à celle de nos trois rapports typiques ».



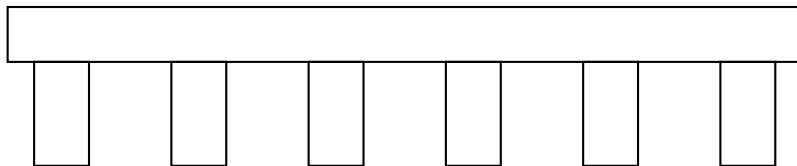
Si l'on entend par gradation « en suite géométrique », elle est de raison $\frac{4}{3} = 1,333\dots$ pour les dimensions grecques et d'approximativement de $\frac{21}{16} = 1,3125$ pour le nombre plastique.

D'ailleurs ce n'est pas le seul lien avec les Grecs et en particulier VITRUVÉ : D désignant la largeur de la colonne et E l'entrecolonnement, les configurations architecturales de piliers selon VITRUVÉ apparaissent ainsi numériquement analysées par VAN DER LAAN dans [6] (Disposition du mur, Ch. XI). (V. p. 22.)

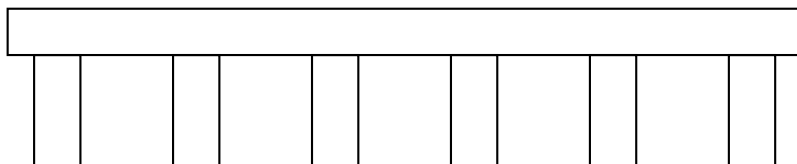
La définition mathématique du nombre plastique n'a pas échappé à VAN DER LAAN, mais il en parle tardivement (environ 30 ans plus tard) dans [6, p. 119] où l'on peut lire :

« La progression géométrique constituée par la succession des mesures d'un système obéit à la formule générale suivant laquelle, de quatre mesures consécutives, la somme des deux plus petites est égale à la plus grande. On

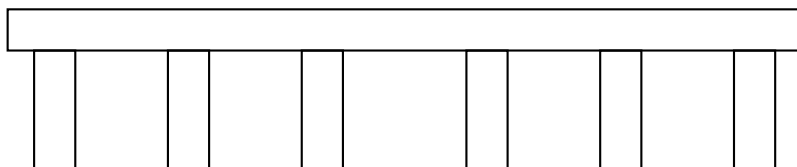
Pycnostyle : colonnes très rapprochées, $E = 1,5 \times D$



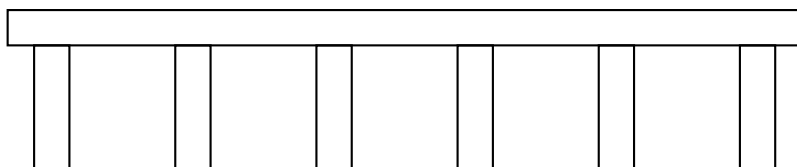
Systyle : colonnes un peu moins rapprochées, $E = 2 \times D$



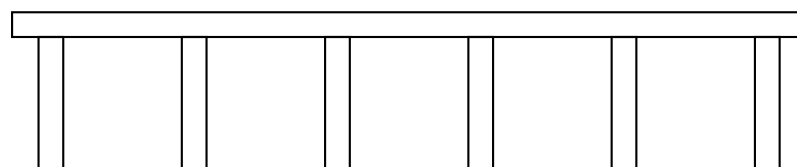
Eustyle : colonnes espacées « de bonne manière »,
 $E = 2,25 \times D$ avec au centre $E = 3 \times D$



Diastyle : colonnes écartées, $E = 3 \times D$



Araeostyle : colonnes clairsemées, $E = k \times D$ avec $k > 4,65$ (ici $k = 4,8$)



pourrait s'attendre à nous voir mettre en équation la raison de cette progression ; ce serait fort simple : $1 + x = x^3$. Mais résoudre cette équation du troisième degré ne nous apprendrait pas grand'chose du point de vue architectonique. En effet, énoncer les rapports entre les mesures d'un système en langage mathématique est totalement différent que de les exprimer au moyen du nombre plastique. Car un calcul mathématique n'aboutirait ici qu'à des nombres suivis de plusieurs décimales, donc à une abstraction, et à ce moment le contact avec la réalité concrète du donné plastique serait totalement rompu ».

Le deuxième personnage de la trinité a déjà été cité : c'est Richard PADOVAN. Lui-même, architecte, a vu la propriété fondamentale des suites du tableau précédent : ce sont les termes d'une suite qui portera désormais son nom.

Je ne peux résister à vous extraire la page du site www.nexusjournal.com/conferences/N2002-Padovan.html qui vous explicite dans un anglais, aussi bon que le français évoqué plus haut, les choses d'un abord délicat. Par ailleurs le dessin qui est quasiment recopié du livre de VAN DER LAAN est tout aussi approché en assimilant mon α qui précède à 6,5.

« The plastic number, discovered by Dom Hans VAN DER LAAN (1904–91) in 1928 shortly after he had abandoned his architectural studies and become a novice monk, differs from all previous systems of architectural proportions in several fundamental ways. Its derivation from cubic equation (rather than a quadratic one such as that which defines the golden section) is a reponse to the three-dimensionality of our world. It is truly aesthetic in the original Greek sense, i.-e., its concern is not 'beauty' but clarity of perception. Its basic ratios, appromatively 3:4 and 1:7, are determined by the lower and upper limits of our normal ability to perceive differences of size among three-dimensional objects. The lower limit is that at which things differ just enough to be of distinct types of size. The upper limit is that beyond which they differ too much to relate to each other ; they then belong to different orders of size. According to VAN DER LAAN, these limits are precisely definable. The mutual proportion of three-dimensional things first becomes perceptible when the largest dimension of one thing equals the sum of two smaller dimensions of the other. This initial proportion determines in turn the limit beyond which things cease to have any perceptible mutual relation. Proportion plays a crucial role in generating architectonic space, which comes into being through the propotional relations of the solid

forms that delimit it. Architectonic space might therefore be described as a proportion between proportions ».

Pour la petite histoire dans l'histoire : Ian STEWART ([9]) a remarqué la coïncidence entre FIBONACCI dit Léonard de Pise qui donne son nom à la suite où apparaît le nombre d'or et PADOVAN (de Padoue) qui donne son nom à la suite où apparaît le nombre d'argent. Vues des États-Unis, ces villes sont proches en effet ; cependant PADOVAN pourrait aussi bien être d'origine serbo-croate voir indienne. Mais voici encore une anecdote transmise par un collègue professeur d'italien. Si l'origine est italienne (de Padoue) la perte du o (padovano) viendrait d'une mise à l'index voire de l'exil d'un ancêtre du ci-devant sieur Richard PADOVAN pour avoir eu des « ennuis » avec le fisc : en clair il n'avait pas payé ses impôts. Imaginons la perte d'une lettre chez Florent, Michel et les autres !

Signalons quelques morceaux choisis sur le site www.aroots.org/notebook/article123.html. L'auteur, Alain DOUANGMANIVANH dans un article « Hans VAN DER LAAN architecte, la demeure humaine », nous fait un curieux salmigondis.

« Dans *L'espace architectonique*, Hans VAN DER LAAN tente de définir ce que *doit être la demeure humaine* à travers la définition d'un système de proportion basé sur le nombre d'or : le nombre plastique ». Allons bon, voilà que le pâtre bougre a tenté mais a-t-il réussi ? D'autre part, l'or et le plastique, c'est pareil : comprenez qui pourra ! Mais on est rassuré car juste après, on découvre que « le nombre plastique serait une réponse au gouffre qui existe entre l'intelligence humaine et le monde insaisissable des phénomènes naturels ».

Cette phrase en fait a été extraite de son contexte et sans « sic », de l'avant-propos à [6] rédigé par le traducteur Dom Xavier BOTTE, qui présente cet ouvrage à la lumière des réactions à [5].

6.2.2. Les lieux touristiques

En 1968, VAN DER LAAN a appliqué concrètement sa théorie en réalisant à l'abbaye de Vaals à Mamelis aux Pays-Bas, l'église de Sint Benedictusberg dont quelques photos, jointes au texte, sont extraites du site [15] avec autorisation de la direction de l'abbaye.



Une surprise de taille (c'est le cas de le dire) attend le lecteur de [6] car VAN DER LAAN, mètre en mains, annonce comme exemple architectonique basé sur le nombre plastique, le fameux site archéologique de Stonehenge et cela a l'air de se tenir.



6.3. La fin de l'histoire ?

Dans cette histoire tricéphale, le troisième personnage apparaît plus tardivement avec la publication de son livre ([4]). Midhat J. GAZALÉ en 1999, y parle en effet de « nombre d'argent », estimant sans doute que le nombre de plastique méritait mieux. Je trouve qu'il n'est pas allé assez loin. C'est encore l'histoire et l'étymologie qui nous guident.

Pour garder le caractère de richesse et d'unicité du nombre Ψ sur lequel nous avons disserté, on devrait plutôt l'appeler *nombre de platine* ; étymologiquement le mot platine en français vient de l'espagnol *plata* (argent) en fait par *platina* qui en est un diminutif traduisant l'idée, lors de sa découverte, d'argent de deuxième zone ou de plus basse extraction : le platine a été découvert en Amérique du Sud vers 1750. Par ailleurs le platine

est plus précieux que l'or ; Φ , le nombre d'or, se construit à la règle et au compas alors que...

De la sorte il n'y aurait, de mon point de vue, que deux nombres précieux, ceux d'or et de platine, et alors aucun inconvénient à mettre tous les autres nombres d'argent dans un coffre plus ou moins bien gardé, dans une banque peu regardante sur la nature des fonds : je vous laisse le choix, les pays de complaisance ne manquent pas !

Le nombre Ψ , quel que soit le nom qu'on lui donne, a-t-il été vu dans la nature ? Ceci est une autre question, qui sera sans doute résolue dès qu'on aura passé suffisamment de temps à observer la nature.

Annexes

À propos de $\cos \frac{2\pi}{7}$

C'est la partie réelle de $\omega = \exp(\frac{2\pi}{7}i)$, qui est l'une des racines septièmes de l'unité ; ω vérifie $\omega^7 = 1$.

On résout donc $z^7 - 1 = 0$ qu'on écrit $(z - 1) \sum_{l=0}^6 z^l = 0$ (1). On met z^3 en facteur pour arriver à $z^3(Z^3 + Z^2 - 2Z - 1) = 0$ (2) où on a posé $Z = z + \frac{1}{z}$. Puis on prend $Z = Z' + h$ avec h adapté pour qu'on n'ait plus de terme en Z'^2 soit $-\frac{1}{3}$. Cela donne $Z'^3 - \frac{7}{3}Z' - \frac{7}{27} = 0$ (3).

La méthode classique consiste à trouver u et v tels que $\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{7}{27} \\ uv = \frac{7}{9}, \end{cases}$

ce qui conduit à u^3 et v^3 donnés par $\frac{7}{54} \pm \frac{7\sqrt{3}}{18}i$. Ces nombres complexes s'écrivent $\frac{7^{\frac{3}{2}}}{3^3} (\frac{1}{2\sqrt{7}} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}i)$. Prenons alors $\theta = \arctan(3\sqrt{3})$ puis $u = \frac{\sqrt{7}}{3} \exp(i\frac{\theta}{3})$ et $v = \frac{\sqrt{7}}{3} \exp(-i\frac{\theta}{3})$.

Les solutions de (3) sont $u + v, ju + j^2v, j^2u + jv$. Ce sont des nombres réels comme le montre l'étude directe de la fonction $Z' \mapsto Z'^3 - \frac{7}{3}Z' - \frac{7}{27}$; en fait la solution positive est $\frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\theta}{3}$.

Le retour à (1), pour la solution qui nous intéresse, se fait en résolvant $z + \frac{1}{z} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\theta}{3} - \frac{1}{3}$ ce qui permet d'en déduire :

$$\cos \frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\theta}{3} - \frac{1}{6}.$$

À partir de là, on considère $\alpha = 2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2 = \frac{2\sqrt{7}}{3}c + \frac{5}{3}$ où $c = \cos \frac{\theta}{3}$. On calcule $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = \frac{14\sqrt{7}}{27}(4c^3 - 3c) - \frac{7}{27}$. Or la trigonométrie donne $4c^3 - 3c = \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, d'où $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0$.

Remarque à propos de l'Innomé

C'est le *deuxième zéro réel* du polynôme $\mathcal{P}_m = X^m - X^{m-1} - \dots - X - 1$ lorsque m est pair qu'on note Θ_m (voir dans les numéros 468 et 469 du « Bulletin Vert » de notre association, tout le travail sur la convergence de la suite (Φ_m) vers 2 et surtout [13]).

Pour localiser les zéros réels de \mathcal{P}_m , qui sont donc distincts de 1, il est plus commode d'écrire $\mathcal{P}_m = \frac{X^{m+1} - 2X^m + 1}{X - 1}$. La localisation par l'étude de $x \mapsto x^{m+1} - 2x^m + 1$ montre que le premier zéro (distinct de 1) est Φ_m entre 1 et 2, et le deuxième zéro est Θ_m , entre -1 et 0.

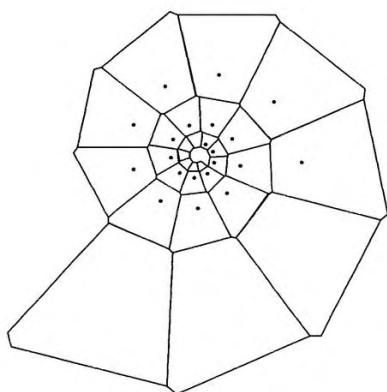
Introduisons f_m telle que $f_m(x) = x - 2 + \frac{1}{x^m}$ sur $[1; +\infty[$. On a $f_m(1) = 0$, $f_m'(x) = \frac{x^{m+1} - m}{x^{m+1}}$ du signe de $x - \sqrt[m+1]{m}$.

Or une brève étude de la fonction exposant $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$ montre qu'elle est toujours positive et inférieure à $\frac{1}{a}$, où a , entre 3 et 4, vérifie $\ln a = 1 + \frac{1}{a}$ donc $0 < g(m) < \frac{1}{3} < \ln 2$ ce qui permet d'affirmer que $1 < \sqrt[m+1]{m} < 2$. Il y a mieux : g croît sur $[2; a]$ puis décroît sur $[a; +\infty[$. La « bonne » fonction f_m s'annule ainsi une deuxième fois en un réel strictement compris entre 1 et 2, qui est donc le nombre Φ_m . On se restreint à étudier f_m sur $[1, 1; 2]$ (avec $m \geq 38$) : la suite de fonctions (f_m) est uniformément convergente sur cet intervalle vers sa limite f qui est la fonction affine $x \mapsto x - 2$. La suite (Φ_m) qui est définie par $f_m(\Phi_m) = 0$ (en effet $\Phi_m \in [1, 1; 2]$ dès que $m \geq 2$) converge donc vers la solution unique à l'équation $f(x) = 0$ soit 2 : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \Phi_m = 2$ (on aurait pu écrire aussi que $|\Phi_m - 2| \leq \frac{1}{1,1^m}$).

Écrivons $\Theta_m = -\varphi_m$; φ_m est la solution positive de $x^{m+1} + 2x^m - 1 = 0$, ce qui veut dire que φ_m peut s'écrire encore : $\varphi_m = \frac{1}{(2 + \varphi_m)^{1/m}} = \frac{1}{2^{1/m}} \times \frac{1}{(1 + \frac{\varphi_m}{2})^{1/m}}$. Or $0 \leq \varphi_m \leq 1$, donc $1 \leq (1 + \frac{\varphi_m}{2})^{1/m} \leq 1,5^{1/m}$. Il en résulte que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi_m = 1$, ce qui démontre que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \Theta_m = -1$.

Un joli gnomon

Voici l'amorce d'un exemple de gnomon (il faut imaginer le cœur où la spirale s'enroule indéfiniment) constitué d'un polygone à six côtés ; cela ne contredit pas le résultat de AARTS puisque l'ensemble V associé est infini.



Le logiciel de géométrie que j'ai utilisé a calé sur le calcul des points conduisant jusqu'au centre de la spirale. D'autre part les divers polygones qui interviennent, sont des cellules de VORONOÏ dont les sites (quelques points en sont dessinés en gras) sont sur une spirale logarithmique.

Qu'est donc une cellule de VORONOÏ? L'ensemble Ω de points (sites) du plan étant donné, la cellule de VORONOÏ associée à tout site A de Ω est l'ensemble des points du plan situés les plus près de A que tout autre point de Ω ; la frontière d'une telle cellule est donc réunion de segments ou demi-droites inclus dans les médiatrices de tous les points de Ω considéré.

Remerciements pour leurs contributions photographiques, leurs démarches ou leurs judicieuses remarques : au site internet de l'abbaye Sint Benedictusberg de Vaals, à Françoise JEANTEL de Montpellier, à Jean-Pierre RICHTON de Montpellier, à Claude DUJARDIN d'Hérouville Saint Clair, à Isabelle GACHE de Nîmes, à Pierrette DAVESNE d'Avenay, à Didier TROTOUX et Éric TROTOUX de Caen, à Michel FRÉCHET de Neufchâtel-en-Bray qui a pallié, au dernier moment à Mons, mes carences techniques, à Chantal FAISANT d'Ifs pour sa relecture minutieuse avant publication, et enfin à Pierre VALLÉE qui m'a lancé, un certain 21 mars 2007, sur la piste du sud avec sa carte postale de Montpellier. Merci aussi à la SBPMef qui, en acceptant ma proposition d'atelier, m'a motivé dans mes recherches.



Le beau « Leonardo FIBONACCI »,
comme il est écrit dans le marbre au musée de Pise

Bibliographie

- [1] Jan AARTS, Robbert FOKKINK, On gnomons, *Math. Vesnik* **55** (2003), 59–64.
- [2] Jan AARTS, Robbert FOKKINK, Godfried KRUIJTZER, Morphic numbers, *Nieuw Archief Wiskunde* **1** (2001), 56–58.
- [3] Xavier CARUSO, Nombre d'or et tournesol, *Revue de Mathématiques Spéciales (RMS)* **3**, mai 2006.
- [4] Midhat J. GAZALÉ, *Gnomons, from Pharaohs to Fractals*, Princeton University Press, Princeton, 1999.
- [5] Hans VAN DER LAAN, *Le nombre Plastique ; quinze leçons sur l'ordonnance architectonique*, Éd. Brill, Leiden, 1960.
- [6] Hans VAN DER LAAN, *L'espace architectonique*, Éd. Brill, Leiden, 1989.
- [7] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS, *Cours de Mathématiques, t. 1 : Algèbre*, Dunod Université, Paris, 1978.
- [8] Ernst S. SELMER, On the irreducibility of certain trinomials, *Math. Scand.* **4** (1956), 287–302.
- [9] Ian STEWART, Tales of a Neglected Number, *Scientific American* (juin 1996) ; trad. française : La sculpture et les nombres, *Pour la Science* **226** (août 1996).
- [10] Helge TVERBERG, On the irreducibility of the polynomials $x^n \pm x^m \pm 1$, *Math. Scand.* **8** (1960), 121–126.
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence
- [12] <http://forums.futura-sciences.com/thread38534.html>
- [13] <http://perso.orange.fr/gery.huvent/irem/metal.pdf>
- [14] http://perso.orange.fr/jean-paul.davalan/liens/liens_fibo.html
- [15] <http://www.benedictusberg.nl>
- [16] <http://www.mathworld.wolfram.com> : de tout sur toutes les maths, enfin presque toutes...
- [17] <http://www.research.att.com/~njas/sequences> : plus de 140 000 suites sont passées au peigne à puces !
- [18] <http://www.univ-lemans.fr/~hainry/articles.html>