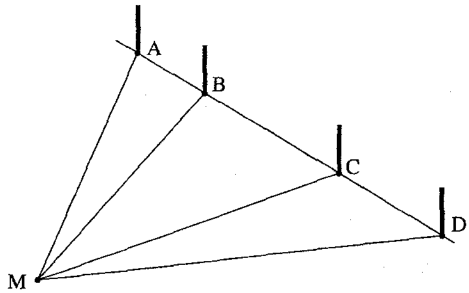
EXERCICE N°2

ÉNONCÉ(*)

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantée en A, B, C et D dans cet ordre.

Ces poteaux déterminent trois buts de largeurs : AB = 1, BC = 2, CD = d, où d est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.



(*) *Notons que les poteaux étaient représentés dans certaines académies et pas dans d'autres.*

SOLUTION 1
(D. Roux)

Si M n'est pas sur la droite (AB) alors, (MB) étant bissectrice de $\widehat{AMC}$, on a $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{BA}{BC}$ (1)

M appartient donc au cercle de diamètre [BB'] tel que (A, C ; B, B') = –1 c'est-à-dire que B' soit le symétrique de C par rapport à A.

De même (MC) étant bissectrice de $\widehat{BMD}$, on a $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{CB}{CD}$ (2). M appartient au cercle de diamètre [CC'], tel que (B, D ; C, C') = –1.

M est à l'intersection de deux cercles. Le cas limite est $d = 6$. Si $d < 6$ l'intersection est vide. Si $d = 6$ les deux cercles sont tangents en B'. Si $d > 6$ il y a deux points symétriques par rapport à la droite (AB). On peut n'en retenir qu'un si l'on considère que le terrain de jeu est un demi plan limité par la droite (AB).

Remarque : On peut considérer que l'ensemble cherché contient aussi tous les points de la droite (AD) privée du segment [AD] (angles nuls).
Rares sont les élèves connaissant cette vieille géométrie et les lignes de niveau. La seule ressource offerte par les actuels programmes est de choisir un repère puis, soit à partir des égalités (1) et (2), si l'élève connaît ces relations, soit en écrivant l'égalité de lignes trigonométriques des angles, d'obtenir les équations des deux cercles et d'étudier leur intersection en résolvant le système obtenu

Remarque : Si d varie de 6 à l'infini, les points M parcourent chacun un arc limité par B' et K (K tel que (KA) $\perp$ ((KB) du demi-cercle de diamètre [BB']. Ils sont le plus éloignés de la droite (AB) lorsque $d = 10$.

SOLUTION 2

(par un élève de première[1])

Choisissons un repère orthonormé d'origine A. B(1, 0), C(3, 0), D(d + 3, 0) , M(x , y).

Supposons M en dehors de la droite (AB) (sinon les angles sont nuls si M $\notin$ [AD])

L'aire du triangle MAB est $\frac{1}{2}$ MA.MB sin $\widehat{AMB}$.

L'aire du triangle MBC est $\frac{1}{2}$ MB.MC sin $\widehat{BMC}$.

Or $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ donc le rapport de ces deux aires vaut : $\frac{MA}{MC}$.

Comme ces deux triangles ont même hauteur issue de M, le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases : $\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ (**)

d'où $4MA^2 = MC^2$ soit $4(x^2 + y^2) = (x-3)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 6x + 9$; divisons par 3, M appartient au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ qui a pour diamètre [BB'] où B'(–3, 0).

De même $\widehat{BMC} = \widehat{CMD}$ entraîne $\frac{MD}{MB} = \frac{d}{2}$ d'où $4MD^2 = d^2MB^2$ (***)

soit $(x^2 + y^2)(d^2 - 4) - 2x(d^2 - 4d - 12) - 3d^2 - 24d - 36 = 0$. Divisons par $(d + 2)$. M appartient au cercle d'équation $(x^2 + y^2)(d-2) - 2x(d-6) - 3(d+6) = 0$ qui coupe l'axe des abscisses en C(3, 0) et en C' dont on trouve l'abscisse en disant que lorsque $y = 0$, le produit des deux racines est $\frac{-3(d+6)}{d-2}$.

Donc l'abscisse de C' est $\frac{d+6}{2-d}$

(*) NDLR : *Ce choix n'intervient pas au début mais seulement pour traduire MA/MC= 1/2.*

(**) *Ceci peut aussi être obtenu en utilisant la relation des sinus* $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ *dans les triangles*

(***) *Ici, plusieurs élèves préfèrent écrire* $(2\overrightarrow{MD} - d\overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MD} + d\overrightarrow{MB}) = 0$ *et introduire les barycentres des points D(2), B(–d) et D(2), B(d). M appartient au cercle dont un diamètre a pour extrémités ces deux barycentres. De même pour* $4MA^2 = MC^2$ *écrit sous la forme* $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$

(1) Solution transmise par D. Roux

L'ensemble des points M cherchés est formé des deux demi-droites obtenues en retirant à l'axe des abscisses le segment [AD] (angles nuls) et de deux points symétriques par rapport à la droite (AB) si les deux cercles ci-dessus se coupent, c'est-à-dire si C' est entre B' et B.

On peut supposer $d > 2$ sinon l'abscisse de C' est plus grande que 3. Alors l'abscisse de C' est négative et la condition $\dfrac{d+6}{2-d} \geqslant -3$ entraîne $d + 6 \leqslant -3(2 - d)$ soit $d + 6 \leqslant -6 + 3d$, d'où $d \geqslant 6$.

Telle est la condition pour que les deux cercles se coupent.

SOLUTION 3
(Clermont-Ferrand)

Soit h la distance de M à la droite (AB) et α la valeur commune de ces angles.

$(0 \leqslant \alpha < \pi)$ On a :

2 aire AMB = $h \times 1$ = MA × MB sinα 2 aire BMC = $h \times 2$ = MB × MC sinα

2 aire CMD = $h \times d$ = MC × MD sinα

- Si $\alpha = 0$, $h = 0$ les points de la droite (AD) extérieurs au segment [AD] sont solution.
- Si $\alpha \uparrow 0$ le problème revient à déterminer les points M vérifiant :

$$\begin{cases} MC = 2MA \\ 2MD = d\,MB \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \left(\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA}\right)\left(\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}\right) = 0 \\ \left(2\overrightarrow{MD} + d\overrightarrow{MB}\right)\left(2\overrightarrow{MD} - d\overrightarrow{MB}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \\ \overrightarrow{MG_3}.\overrightarrow{MG_4} = 0 \end{cases}$$

où G_1, G_2, G_3, G_4 désignent les barycentres respectifs des systèmes

$\{A(2), C(1)\}$, $\{A(-2), C(1)\}$, $\{D(2), B(d)\}$, $\{D(2), B(-d)\}$ $(d \uparrow 2)$

avec

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{donc} \quad G_1 = B \quad ; \quad \overrightarrow{AG_2} = -\overrightarrow{AC} \quad \text{A milieu de } [G_2C]$$

$$\overrightarrow{BG_3} = \frac{2}{d+2}\overrightarrow{BD} \qquad \overrightarrow{BG_4} = \frac{2}{2-d}\overrightarrow{BD}$$

(il est immédiat que le cas $d = 2$ n'a aucune solution).

Les points M solutions doivent appartenir aux cercles de diamètres $[G_2B]$ et $[G_3G_4]$. Ces cercles ne sont sécants que si $d > 2$ et $BG_4 < BG_2$.

Or $\quad BD = d + 4 \quad BG_2 = 4 \quad BG_4 = \frac{2}{d-2} BD$

il faut donc $\quad \frac{2}{d-2}(d+2) < 4 \quad$ ou $\quad 6 < d.$

SOLUTION 4
(Montpellier)

On peut travailler sur les aires des triangles MAB, MAC et MAD. Si H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), en posant MH = h, les aires valent respectivement : $\frac{1}{2}h$, h, et $\frac{1}{2}dh$. Par ailleurs dans le triangle MAB l'aire est égale à $\frac{1}{2}$MA.MB sinα, dans le triangle MAC, l'aire est égale à $\frac{1}{2}$MB.MC sinα, dans le triangle MCD l'aire est égale à $\frac{1}{2}$MC.MD sinα. On prend un repère orthonormé d'origine A, l'axe des x étant la droite (AB), les coordonnées des différents points sont alors : A(0, 0), B(0, 1), C(0, 3), D(0, 3 + d), M(x, y).

On a :

$\frac{1}{2}$MA.MB sin$\alpha = \frac{1}{2}h \qquad \frac{1}{2}$MB.MC sin$\alpha = h \qquad \frac{1}{2}$MC.MD sin$\alpha = \frac{1}{2}dh.$

On en tire : $\quad$ MA = 2MC, $\quad$ soit $\boldsymbol{(x+1)^2 + y^2 = 4}$

et $\quad d$MB = 2MD, $\quad$ soit $d^2((x+1)^2 + y^2) = 4(x-3-d)^2 + 4y^2$

ce qui donne après calcul pour $d \uparrow 2$ le cercle d'équation :

$$\left[\frac{x-(d-6)}{d-2}\right]^2 + y^2 = 4\,\frac{d^2}{(d-2)^2}$$

et pour $d = 2$ la droite d'équation $x = 3$.

Pour $d = 4$ les cercles sont concentriques, si $d \uparrow 4$, l'élimination de $x^2 + y^2$ conduit à $x = \frac{6}{4-d}$.

Et, en reportant dans l'équation $\boldsymbol{(x+1)^2 + y^2 = 4}$, on voit que
- pour $d > 6$,le système admet deux solutions (symétriques par rapport à (AB);
- pour $d < 6$, pas de solution ;
- pour $d = 6$, les deux cercles sont tangents en un point situé sur la droite (AB).

Commentaires

(Académie de Créteil)

a) Géométriquement, il faut traduire le fait que (MB) soit la bissectrice de $\widehat{AMC}$ par la condition $\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC}$ (1).

La propriété classique de la géométrie élémentaire : « *dans un triangle, la bissectrice découpe le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents* » n'est pas connue des candidats. (Elle le sera peut-être l'année prochaine grâce au changement de programme de Seconde où sont réapparus les triangles semblables, qui permettent de la démontrer aisément). Mais certains la retrouvent en utilisant la propriété des sinus ($\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$) dans les triangles MAB et MCB et un candidat en a trouvé une jolie démonstration en passant par les aires de ces mêmes triangles(*). Ensuite, faut-il encore savoir traiter l'égalité (1), sous forme de lignes de niveaux, en se plaçant dans un repère, ou encore une fois à l'aide des triangles semblables (voir l'annexe ci-dessous), qui permettent de trouver rapidement un premier cercle centré sur la droite (Δ) d'alignement des poteaux, sur lequel doit être M.

Il ne reste plus qu'à refaire le même raisonnement avec les points B, C, D en place de A, B et C. Les points M cherchés sont donc à l'intersection de deux cercles. (Cette intersection dépend de la valeur de d = CD, mais cette discussion n'est pas le point le plus intéressant de l'exercice).

b) Nombre de candidats ont bien sûr remarqué que pour les points M situés dans la partie de la droite (Δ) extérieure au segment [AD], tous les angles considérés étaient nuls et que ces points M faisaient donc partie de l'ensemble cherché

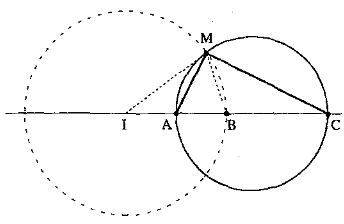
c) Aucun candidat ne s'est placé spontanément dans un repère où pourtant (à condition de savoir la formule donnant la distance d'un point à une droite dont on connaît une équation cartésienne), les calculs n'étaient pas très compliqués.

Annexe : Soit un point M n'appartenant pas à la droite et I le point où la tangente en M au cercle circonscrit (MAC) coupe la droite. Les triangles MIA et CIM sont semblables (ils ont I en commun et les angles $\widehat{AIM}$ et $\widehat{ICM}$ sont égaux en application des propriétés de l'angle inscrit). On a donc $\frac{MC}{MA} = \frac{CI}{MI} = \frac{MI}{AI} = 2.$

(*) NDLR : la démonstration peut se faire dès la cinquième en calculant de deux façons chaque aire des triangles MAB et MBC : soit avec les hauteurs issues de M (égales), soit avec la hauteur issue de A.

S'agissait-il de cela ?

D'où CI = 2MI et MI = 2AI. Par suite CI = 4AI et AI = AC/3. Ceci démontre que le point I est indépendant du point M choisi. et comme $\text{MI} = 2\text{AI} = \frac{2}{3}\text{AC}$, M est sur le cercle de centre I et de rayon $\frac{2}{3}$ AC.



(M. Regnault)

Une situation intéressante dont l'étude nécessite une bonne connaissance du programme de Première S et une maîtrise suffisante pour effectuer un choix entre plusieurs approches possibles.

Bien rares sont les élèves qui ont su avancer de quelques pas significatifs dans la résolution ! (sans doute un signe révélateur d'une carence dans notre enseignement qui ne propose que trop ratrement des problèmes laissant ouverte la question du choix de la démarche ... vaste sujet !).

L'étude de l'ensemble des points M tels que $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = k$ ayant disparu depuis longtemps des programmes de 1ère et, avec elle, celle d'un bon nombre de relations métriques conduisant à son application, en particulier les relations liées aux bissectrices d'un triangle, la démarche analytique devenait la voie la plus sûre... maismoins de 5% des candidats s'y sont engagés sans doute faute d'y avoir pensé.

Souvent l'égalité des angles a été traduite par celle des cosinus qui a ensuite donnélieu à l'utilisation du théorème d'Al-Kashi dont il n'est rien ressorti. Peu d'élèves ont pensé à utiliser les relations de proportionnalité entre les sinus et les côtés qui conduisaient rapidement aux deux relations $\frac{\text{MC}}{\text{MA}} = 2$ et $\frac{\text{MD}}{\text{MB}} = \frac{d}{2}$ avec cependant l'inconvénient de la non-équivalence entre l'égalité des angles et celle des sinus, ce qui nécessitait un complément de discussion.

Quelques fois, la notion de barycentre a été évoquée ; l'utilisation était incorrecte mais il y avait peut-être l'intuition de la méthode : $\frac{\text{MC}}{\text{MA}} = 2$, transformé en $\text{MC}^2 - 4\text{MA}^2 = 0$, indique que M est sur le cercle centré au barycentre de (A, –4) et (C, 1) et de rayon 2GA (= 2) et idem pour traiter $\frac{\text{MD}}{\text{MB}} = \frac{d}{2} \dots$

A signaler également la présence, dans certaines copies, des solutions particulières que sont les points de la droite (AB) privée du segment [AB].