∽ Baccalauréat C Paris septembre 1973 ∾

EXERCICE 1

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère dans le plan P trois points distincts A, B, C d'abscisses respectives a, b et c.
   Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit rectangle en A est :

$$\frac{b-a}{c-a}+\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}=0.$$

2. Soit M un point du plan d'affixe z. On désigne par M' et M'' les points ayant pour affixes z^2 et z^3,
   Quelles conditions doit vérifier z pour que les trois points M, M', M'' soient distincts ?
   Trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que le triangle $MM'M''$ soit rectangle en M, ou en M' ou en M''.
   Dessiner $\mathscr{E}$.

EXERCICE 2

Soit X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 1 et 0, les probabilités respectives des couples de valeurs de X et Y étant données dans le tableau ci-dessous :

Y \ X	1	0
1	p	$\frac{1}{2}-p$
0	$\frac{1}{3}-p$	$\frac{1}{6}+p$

où p est un nombre réel.

1. Dans quel intervalle doit se trouver p pour que ces données soient acceptables ?
   Calculer les probabilités marginale des valeurs de X et de Y.
   Calculer les espérances mathématiques et les écarts-types de X et de Y.
2. Calculer p de façon que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, on désigne par $(\mathscr{H})$ la courbe qui a pour équation

$$x^2-2y^2=1$$

et par $(\mathscr{K})$ la courbe qui a pour équation

$$x^2-2y^2=-1.$$

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Tracer les courbes $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{K})$ et leurs asymptotes. Placer sur la même figure le rectangle dont les côtés sont portés par les quatre droites qui ont pour équations

$$x = 1, \quad x = -1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Partie A

On considère la suite de points

$$M_1\left(a_1\ ;\ b_1\right),\ M_2\left(a_2\ ;\ b_2\right),\ \ldots,\ M_n\left(a_n\ ;\ b_n\right),\ \ldots$$

(où $a_n,\ b_n$ désignent les coordonnées de M_n dans le repère choisi), telle que $a_1 = b_1 = 1$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n & = a_{n-1} + 2b_{n-1}, & \\ b_n & = & a_{n-1} + b_{n-1}, \end{array}\right.$$

pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que a_n et b_n sont des entiers positifs.
Étudier, suivant la parité de n, la parité de a_n et b_n.
Montrer que, suivant que n est pair ou impair, le point M_n appartient à la courbe $(\mathscr{H})$ ou à la courbe $(\mathscr{K})$.
Vérifier que, lorsque n tend vers l'infini, a_n et b_n tendent vers l'infini et trouver la limite de $\dfrac{b_n}{a_n}$.
En déduire celle de $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ et celle de $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$.

2. Démontrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

3. Démontrer que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
Exprimer $\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ à l'aide de a_n et b_n.

Partie B

1. À tout couple de points $P(x\ ;\ y)$ et $P'\left(x'\ ;\ y'\right)$ appartenant à la courbe $(\mathscr{H})$, on associe le point Q qui a pour coordonnées

$$xx' + 2yy'\ ;\ xy' + yx'.$$

On note $Q = P * P'$.
Montrer que, pour la loi notée $\star$, $(\mathscr{H})$ est un groupe commutatif.
Quel est son élément neutre ?
Quel est le symétrique de P pour la loi $\star$?

2. A tout point $P(x\ ;\ y)$ appartenant à $(\mathscr{H})$ on associe la matrice

$$G_P = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour la multiplication des matrices, l'ensemble des matrices G_P est un groupe, isomorphe au groupe $((\mathscr{H}), \star)$ défini sur $(\mathscr{H})$ par la loi $\star$.
Quelle est la matrice inverse de la matrice G_P ?

3. On suppose distincts les points P et P' définis en B **1.** On désigne par A le point de $(\mathscr{H})$ qui a pour coordonnées (1 ; 0).
Vérifier que les droites AQ et PP' sont parallèles.
Soit P'' un troisième point de $(\mathscr{H})$ (distinct de P et de P').
On pose $R = P' \star P''$. En utilisant une propriété de la loi $\star$, démontrer que les droites QP'' et PR sont parallèles.