SOLUTION

L'isobarycentre G des points A_i vérifie par définition :

$$n \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{1 \le i \le n} \overrightarrow{OA_i}.$$

Donc quels que soient les points A_i et A_j, si l'on nomme G_{ij} l'isobarycentre des $(n-2)$ restants on a :

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = n \cdot \overrightarrow{OG} - (n-2) \cdot \overrightarrow{OG_{ij}}.$$

En appelant H le point défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{n}{n-2} \cdot \overrightarrow{OG},$$

ceci peut s'écrire :

$$\frac{\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}}{n-2} = \overrightarrow{G_{ij}H}.$$

Or A_i et A_j étant sur une même sphère,

$$\overrightarrow{OA_i}^2 - \overrightarrow{OA_j}^2 = 0,$$

donc $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{A_j A_i}$. On en déduit que H appartient au plan perpendiculaire à A_iA_j passant par G_{ij}, et ce, quels que soient i et j : H est le point cherché.

La puissance de H par rapport à la sphère vaut par définition : $OH^2 - R^2$. Or l'identité, valable pour toute famille (a_l) de n éléments d'un espace euclidien quelconque :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \sum_{i<j}\left(a_i - a_j\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

devient, si $a_i = \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$:

$$n^2\mathrm{OG}^2 + \mathrm{K} = n^2\mathrm{R}^2,$$

soit

$$\mathrm{OH}^2 = \frac{n^2\mathrm{R}^2 - \mathrm{K}}{(n-2)^2}.$$

Donc la puissance de H vaut bien :

$$\mathrm{OH}^2 - \mathrm{R}^2 = \frac{(4\mathrm{n}-4)\mathrm{R}^2 - \mathrm{K}}{(n-2)^2}.$$

J'ai reçu 11 réponses à ce problème facile, de Richard BECZKOWKI (71-Chalon-sur-Saône), Pierre BORNSZTEIN (78-Maisons-Laffitte), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Christian DUFIS (87-Limoges), Christine FENOGLIO (69-Lyon), Michel HÉBRAUD (31-Toulouse), Gérard LAVAU (21-Dijon), René MANZONI (76-Le Havre), Christian PERROUD (74-Habère-Lullin), Gérard PRIGENT et Claude TALAMONI (93-Dugny et Aulnay), Pierre RENFER (67-Ostwald).

Les démonstrations ne sont pas très différentes. On peut utiliser l'« équation » du plan (Π_{ij}) passant par G_{ij} et perpendiculaire à $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$, qui s'écrit pour Gérard Lavau (avec $a_i = \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$, $x = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$):

$$< a_i - a_j, x - \frac{1}{n-2}\sum_{k\neq i,j} a_k >= 0,$$

et pour Christine Fenoglio :

$$\left(n\overrightarrow{\mathrm{MG}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j} = 0.$$

On peut aussi remarquer que l'homothétie de centre G et de rapport $\dfrac{2}{2-n}$ transforme le milieu de $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ en G_{ij}, donc le plan médiateur de $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ (qui passe par O) en (Π_{ij}), qui passe par H (homothétique de O).

Gérard Prigent et Claude Talamoni signalent que cet énoncé figure (6, page 90) dans le livre de Moisotte : *1850 exercices de mathématiques pour l'oral du CAPES* (Dunod, 1978), et que sa première question a fait l'objet d'un article dans la « modestissime » et aujourd'hui disparue revue du groupe de mathématiques du lycée Voillaume (93-Aulnay).

Ce problème se généralise à n'importe quel espace euclidien, mais surtout, il possède des cas particuliers intéressants. Richard Beczkowski signale que si les points sont cocycliques, ils appartiennent à une infinité de sphères, et les plans (Π_{ij})

ont une droite en commun. C'est en particulier le cas lorsque $n = 3$: la droite passe alors par l'orthocentre du triangle, et l'on retrouve les relations classiques :

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 3 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OG}},$$

$$\mathrm{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Pierre Bornsztein ajoute que la première partie est une généralisation à l'espace d'un résultat dû à M. B. Cantor (1829 - 1920), dont on peut trouver l'énoncé dans le poly du stage olympique de Saint-Malo (été 2003), exercice 11 de la muraille : en appelant (Δ_i) la perpendiculaire à la tangente au cercle en A_i passant par l'isobarycentre des $(n - 1)$ autres points, les droites (Δ_i) sont concourantes. Et Michel Hébraud signale une généralisation de la notion d'orthocentre (J. Trignan, *La géométrie des nombres complexes*) : l'orthocentre H d'un polygone inscriptible étant défini par $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \sum \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$, H est l'intersection de tous les cercles de centres H_i (orthocentre du polygone privé du sommet A_i) et de rayon R (car $\overrightarrow{\mathrm{H}_i\mathrm{H}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$). Les droites joignant l'isobarycentre de p points et l'orthocentre des $(n - p)$ restants sont concourantes.