SOLUTION de Pierre SAMUEL (92 - Bourg la Reine).

D'autres solutions à ce problème ont été publiées dans le bulletin 438, janvier - février 2002, p. 131 à 135. La solution approfondie de Pierre Samuel mérite un traitement particulier, mais il n'est pas possible de la publier intégralement. Je me suis donc permis de la condenser en tenant compte de ce qui est paru dans le précédent bulletin.

Étant donné un entier $k \geq 2$, on cherche s'il existe des entiers m et n tels que

$$(n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \ldots + (n + k)^2 = m^2.$$

Autrement dit :

$$6m^2 = k\,(6n^2 + 6(k + 1)n + (k + 1)(2k + 1)) \qquad \text{(a)}$$

Ce problème a été abordé en 1873 par E. Lucas qui montra que, pour $k \leq 24$, la réponse est positive si et seulement si $k = 2$, 11, 23 ou 24. La réponse est simple si k est lui-même un carré : c'est « oui » si et seulement si k est impair et non multiple de 3. Les solutions sont alors en nombre fini (cf. bulletin 438, p. 133-134).

La situation est plus complexe lorsque k n'est pas un carré. On travaille essentiellement dans un corps quadratique réel, avec sa fonction « norme », ses « unités », les formes quadratiques qui lui sont associées. En posant $k = k'a^2$, où k' est sans facteurs carrés, on doit voir si l'équation diophantienne :

$$x^2 - k'y^2 = -3(k-1)(k+1) \qquad (1)$$

a des solutions. Si elle en a, elle en a une infinité. Le § II donne quatre conditions nécessaires. Elles sont « presque suffisantes » (ainsi, pour les 99 valeurs de $k \leq 1\,000$ qui les satisfont, (1) a des solutions sauf si $k = 842$). Je remercie Joseph Oesterlé de m'avoir expliqué le « pourquoi » de cette situation.

Le § III caractérise les solutions (x, y) de (1) qui permettent le retour au problème initial, c'est-à-dire le calcul de n et m, et montre comment tenter de les trouver. Le § IV décrit un processus fini donnant, en théorie, toutes les solutions de (1) (ou d'équations voisines) et montrant, dans certains cas, qu'il n'y en a point. Le § V montre comment un procédé de « séparation des inconnues » permet d'alléger la recherche des solutions. Un appendice s'occupe d'une équation

$$x^2 - k'y^2 = 3(k+1) \qquad (2)$$

et de ses liens avec (1), un autre[1] dit comment mener assez efficacement les calculs pratiques.

Le langage des congruences sera souvent utilisé, en particulier le fait que, modulo 3, 4 ou 8, les seuls carrés sont 0, 4 et 1. Des propriétés des nombres algébriques seront aussi utilisées ; on les trouvera, par exemple, dans : Pierre SAMUEL, *Théorie algébrique des Nombres* (Hermann, 1971), noté (PS).

I. Les valeurs carrées de *k*

Théorème 1. Si k est un carré a^2, le problème n'a de solutions que si a est impair et non multiple de 3. Les solutions sont alors en nombre fini. (cf. Bulletin 438, p. 133-134).

II. Les conditions nécessaires

Nous supposons désormais que k n'est pas un carré ($k' \neq 1$), et nous allons nous ramener à l'équation :

$$x^2 - k'y^2 = -3(k-1)(k+1) \qquad (1)$$

En effet, l'équation initiale (a), avec $k = k'a^2$, entraîne que a^2 divise $(6m)^2$ et peut s'écrire, en posant $6m = am'$ et $x = 3(2n + k + 1)$:

$$m'^2 - k'x^2 = 3k'(k-1)(k+1).$$

Donc k' divise m'^2, et il divise m' car il est sans facteur carré, ce qui permet de poser $m' = k'y$.

(1) N.D.L.R. En raison des contraintes rédactionnelles, nous n'avons conservé qu'un bref résumé de ces appendices.

Cette équation (1) exprime que $-3(k-1)(k+1)$ est la norme de l'entier algébrique $x + y\sqrt{k'}$. À partir d'une solution, on en obtient une infinité d'autres en multipliant $x + y\sqrt{k'}$ par les puissances d'une unité U de norme 1 de l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{k'}$. **A** n'est pas obligatoirement l'anneau de tous les entiers algébriques de $\mathbf{Q}(\sqrt{k'})$, U n'est donc pas « l'unité fondamentale » V de $\mathbf{Q}(\sqrt{k'})$, mais U doit être égal soit à V, soit à V^3, soit à V^2, soit à V^6 (cf. (PS), p. 72-78).

Lemme 1. Pour que 3 soit un carré modulo un entier $k' > 1$ sans facteurs carrés, il faut et il suffit que, à l'exception éventuelle de 2 et de 3, tous les facteurs premiers de k' soient congrus à 1 ou −1 modulo 12.

Cela résulte classiquement de la loi de réciprocité quadratique, et ce résultat reste vrai pour tout entier k' non multiple de 4.

Lemme 2. Si p divise $x^2 - k'y^2$ et si k' n'est pas un carré modulo p, p divise x et y et p^2 divise $x^2 - k'y^2$.

Sinon l'inverse y' de y modulo p vérifierait : $(xy')^2 \equiv k' \ (p)$.

Par ailleurs, −1 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1 \ (4)$ (cf. (PS) p. 94). Il résulte de tout cela :

Théorème 2. Les conditions suivantes sont nécessaires pour que l'équation

$$x^2 - k'y^2 = -3(k-1)(k+1) \qquad (1)$$

(où $k = k'a^2$, k' sans facteur carré) ait des solutions (entières) :
(C.1) À l'exception éventuelle de 2 et 3, tous les facteurs premiers de k' sont congrus à 1 ou −1 modulo 12.
(C.2) Si k' est multiple de 3, $k' = 3k''$, on a $k'' \equiv -1 \ (3)$.
(C.3) Tout facteur premier $p \equiv -1 \ (4)$, $p \neq 3$, de $k + 1$ y figure avec un exposant pair.
(C.4) Si $k' \equiv -1 \ (3)$, l'exposant de 3 dans $k + 1$ est impair (donc non nul).

Pour (C.1), on note que $x^2 \equiv 3 \ (k')$ et on applique le lemme 1.
Pour (C.2), si $k' = 3k''$, 3 divise x^2, donc x, d'où $k''y^2 \equiv -1 \ (3)$.
Si $p \equiv -1 \ (4)$ divise $k + 1 = k'a^2 + 1$, on a $k'a^2 \equiv -1 \ (p)$. Donc k' n'est pas un carré modulo p et on applique le lemme 2 : p^2 divise le second membre de (1). Comme p ne saurait diviser à la fois $k - 1$ et $k + 1$ et comme $p \neq 3$, p^2 divise $k + 1$: on simplifie alors par p^2, $x_1^2 - k'y_1^2 = 3(1-k)k_1$ (en posant $x = px_1$, $y = py_1$ et $k + 1 = p^2k_1$), et par applications répétées on obtient (C.3).
Enfin, si $k' \equiv -1 \ (3)$, ce n'est pas un carré modulo 3. D'après le lemme 2, 9 divise le second membre de (1), et l'autre facteur 3 ne peut diviser que $k + 1$, ce qui, par applications répétées, permet de conclure (C.4).

Ces deux dernières méthodes fournissent également, pour un k donné, ce que j'appellerai des **simplifications inévitables** :
si $p \equiv -1 \ (4)$ est facteur premier de $k + 1$ (resp. si $k' \equiv -1 \ (3)$), toute solution (x, y) de

(1) s'écrit (px_1, py_1) (resp. $(3x_1, 3y_1)$).
En outre, si k est impair et $k' \equiv -1$ (4), $x^2 + y^2 \equiv 0$ (4), donc x et y sont pairs.

Notons au passage que $k - 1$ n'intervient pas dans les conditions nécessaires : ceci est lié au fait que $1 - k = 1 - a^2k'$ est une norme, $\mathbf{N}(1 - a\sqrt{k'})$.

III. Retour au problème initial

Pour résoudre le problème initial, il ne suffit pas de trouver une solution de (1). Encore faut-il trouver des entiers m et n tels que $3(2n + k + 1) = x$ et $6m = ak'y$. Une solution (x, y) de (1) sera dite **adéquate** si c'est possible.

Théorème 3. Une solution (x, y) de (1) est adéquate si et seulement si :
a) on a $x \equiv 0$ (6) lorsque k est impair,
b) on a $x \equiv 3$ (6) lorsque k est pair.
$k'y$ est alors multiple de 6.

La nécessité résulte de $x = 3(2n + k + 1)$. Or ces conditions impliquent que $x^2 - 3(1 - k^2) = k'y^2$ est divisible par 6, donc $k'y$ également, d'où la suffisance.

Corollaire 1. Pour que (1) admette des solutions adéquates, il faut que :
a) Si k est pair, k' soit pair.
b) Si k est multiple de 3, k' soit multiple de 3

En effet, dans le premier cas on doit avoir $k'y^2 \equiv 2$ (4), et dans le second, $k'y^2 \equiv -3$ (9).

Corollaire 2. Si une solution $x + y\sqrt{k'}$ de (1) est adéquate, il en est de même de ses produits par les puissances de l'unité $U = u + v\sqrt{k'}$. Donc si le problème initial a une solution, il en a une infinité.

En effet, si $x' + y'\sqrt{k'} = (u + v\sqrt{k'})(x + y\sqrt{k'})$, $x' = ux + vyk'$ est divisible par 6 si x est divisible par 6, donc si k est impair, car yk' est divisible par 6. Si, par contre, k est pair, k' doit être pair et $u^2 - k'v^2 = 1$ montre que u est impair.

Exemples :

1) Si $k = k' = 33$, parmi les solutions (6, 10), (27, 11), (72, 16), (93, 19), (138, 26), (258, 46), (369, 65), (456, 80)… de $x^2 - 33y^2 = -3$ 264, seules les solutions paires sont adéquates : les cinq ci-dessus fournissent les couples $(n, m) = (-16, 55), (-5, 88)$, (6, 143), (26, 253) et (59, 440).

2) On trouve une infinité de solutions adéquates par le procédé suivant : si b est un multiple impair de 3, $b^2 - 3 = k'c^2$ avec k' sans facteur carré. $b^2 - 3$ est divisible par 2 mais pas par 4, par 3 mais pas par 9, donc k' est multiple de 6. L'équation : $r^2 - k'a^2 = 1$ permet de trouver une infinité de valeurs de $k = k'a^2$ telles que $k + 1 = r^2$. Dès lors, $3(k + 1)$ est la norme de $r(b + c\sqrt{k'})$ et $1 - k$, la norme de $1 + a\sqrt{k'}$, donc l'équation (1) a pour solution :

$$x + y\sqrt{k'} = r(b + c\sqrt{k'})(1 + a\sqrt{k'}),$$

et on vérifie qu'elle est adéquate.

La recherche de solutions adéquates distingue les cas :

k impair, donc k' impair.

- $k' \equiv -1$ (3), donc (d'après (C.1)) $k' \equiv -1$ (12), et toute solution de (1) est adéquate, c'est-à-dire multiple de 6. Exemple : $k = 11$, $x^2 - 11y^2 = -360$ aboutit à $(n, m) = (-5, 11), (17, 77), (37, 143), \ldots$
- $k' \equiv 1$ (3), donc $k' \equiv 1$ (12) et rien n'assure qu'une solution de (1) soit adéquate : pour trouver ces solutions, on doit traiter l'équation « simplifiée » (1′) obtenue en divisant le second membre de (1) par 36 ($k - 1$ étant divisible par 12). Exemple : $k = 73$, (1) $x^2 - 73y^2 = -15984$ donne (1′) $x^2 - 73y^2 = -444$ dont la solution (478, 56) fournit $(n, m) = (441, 4\,088)$.
- $k' \equiv 0$ (3), $k' = 3k''$ avec $k'' \equiv -1$ (3) (d'après (C.2)), donc $k'' \equiv -1$ (12) (d'après (C.1)), x est bien multiple de 3, mais rien ne prouve qu'il soit pair : il faut résoudre la « simplifiée » par 4 (1′). Exemple : $k = 177$, (1′) $x^2 - 177y^2 = -2349$ a pour racines (201, 19), (1923, 145), … qui conduisent à : $(n, m) = (-22, 1\,121)$, (552, 8 555), …

k pair, donc (d'après le corollaire 1 du théorème 3), k' pair.

- $k' \equiv -1$ (3) : toute solution (x, y) de (1) est adéquate (d'après (C.4)). Exemple : $k = 26$, $(n, m) = (-12, 39), (24, 195), \ldots$
- $k' \equiv 1$ (3), x est impair mais pas nécessairement multiple de 3, d'où nécessité de « simplifier » par 9. Exemple : $k = 184$, donc $k' = 46$. La simplifiée $x^2 - 46y^2 = -11\,285$ conduit à $(n, m) = (6, 1518), (196,3726), \ldots$
- $k' \equiv 0$ (3), toute solution de (1) est adéquate. Exemple : $k = 24$, donc $k' = 6$. (1) $x^2 - 6y^2 = -1\,725$ fournit : $(n, m) = (-12, 34), (-9, 38), (-5, 50), (0, 70), (8, 106), (19, 158), \ldots$

On remarquera au passage que l'équation : $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = m^2$ admet une seule solution ($k = 24$, $m = 70$) hormis la solution triviale $k = m = 1$ (démonstration élémentaire, mais pas facile), et que, plus généralement, d'après un profond théorème de Thue et Siegel sur les cubiques de genre 1, pour n donné, l'équation $(n + 1)^2 + \ldots + (n + k)^2 = m^2$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

IV. Solutions irréductibles et solutions réductibles

Soit $U = u + v\sqrt{k'}$ $(u, v > 0)$ la plus petite unité de norme 1 contenue dans $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{k'}$. Si $S = x + y\sqrt{k'}$ $(x, y > 0)$ est une solution d'une équation de la forme $x^2 - k'y^2 = b$ (comme (1) ou une simplifiée), nous dirons que S est réductible s'il existe une autre solution $S' = x' + y'\sqrt{k'}$ $(x', y' > 0)$ telle que $S = S'U$.

Théorème 4. Pour que S soit réductible, il faut et il suffit qu'on ait $y > u\sqrt{\frac{|b|}{k'}}$ si $b < 0$, et $y > v\sqrt{b}$ si $b > 0$[(2)].

En effet, S est réductible si et seulement si

$$S' = x' + y'\sqrt{k'} = (x + y\sqrt{k'})(u - v\sqrt{k'})$$

vérifie : $x' > 0$ et $y' > 0$, soit $v^2k'y < uvx < u^2y$. En élevant au carré et en soustrayant $k'u^2v^2vy^2$, compte tenu que $x^2 - k'y^2 = b$ et $u^2 - k'v^2 = 1$, cela équivaut à : $-k'v^2y^2 < u^2v^2b < u^2y^2$, d'où le résultat.

Ces solutions irréductibles sont donc en nombre fini et déterminent une partition de l'ensemble des solutions. Les majorations du théorème 4 montrent qu'il suffit d'un nombre fini d'essais pour trouver toutes les solutions irréductibles ou pour montrer qu'il n'y a pas de solution irréductible, et donc pas de solution.

V. Résultats obtenus

J'ai déterminé « à la main » les premières valeurs admissibles de k (c'est-à-dire satisfaisant aux conditions nécessaires du Théorème 2 et du Corollaire 1 au Théorème 3). Jusqu'à 100, ce sont : $k = 2$, 11, 23, 24, 26, 33, 47, 50, 59, 73, 74, 88, 96 et 97. Il y en a 324 pour $k \leq 5\,000$. J'ai trouvé des solutions adéquates pour la plupart d'entre elles, mais constaté (par application du § IV, ou par un raisonnement de « descente » pour $k = 842$) que l'équation (1) n'a pas de solutions pour $k = 842$, 2 306, 2 402, 3 602 et 3 650.

Mon ami Joseph Oesterlé m'a dit pourquoi les conditions nécessaires ne sont pas suffisantes. Celles du Théorème 2 expriment que (1) a une solution (x, y) en entiers p-adiques pour tout nombre premier p. On en déduit, en notant b le second membre de (1), qu'il existe une forme quadratique entière $G(u, v)$, équivalente à $F(x, y) = x^2 - k'y^2$ sur le corps des rationnels, c'est-à-dire appartenant au même « genre » que F, telle que $G(u, v) = b$ ait une solution entière (telle que « G représente b », comme disent les spécialistes). Or, dans beaucoup de cas, en particulier lorsque le carré de tout idéal est principal (ce qui est fréquent), le genre de F se réduit aux formes qui lui sont équivalentes sur **Z**. Cela explique la rareté des cas « négatifs » (5) ou encore douteux pour moi. Dans tous ces cas, j'ai trouvé une forme G du même genre que F qui représente b.

D'autre part, Monsieur Karim Belabas, chercheur à Orsay, m'a informé que, bien qu'infini (cf Exemple 2 du § III), l'ensemble des valeurs admissibles de k est de densité nulle (ceci par des considérations de théorie analytique des nombres, qui montrent que le nombre de valeurs admissibles $\leq x$ croît comme $x/\mathrm{Log}\, x$). De plus, en 5 minutes de machine (bien programmée), il a trouvé qu'il y a 4 795 valeurs

(2) N.D.L.R. Chacune des conditions équivaut à : $S > U\sqrt{b}$; en effet, $S' > \sqrt{b}$ si et seulement si $S' > \left|\frac{b}{S'}\right| = \left|x' - y'\sqrt{k'}\right|$, soit : x' et y' positifs.

admissibles de k pour $k \leq 10^5$:
— dans 4 498 cas, des solutions adéquates ont été trouvées ;
— dans 225 cas, l'équation (1) n'a pas de solution (pour $k \leq 5\,000$, ce sont 842, 2 306, 2 402, 2 459, 3 602, 3 650 et 3 803) ;
— dans les 72 cas restants, (1) a des solutions mais aucune n'est adéquate (le premier exemple est : $k = 6\,081$).
Pour caractériser chacune de ces trois possibilités, on doit faire appel à des propriétés arithmétiques fines du corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{k'})$ (structure des groupes des classes, congruences relatives à l'unité fondamentale).

Remarque sur $k = 842$

L'absence de solutions pour $k = 842$ peut être démontrée par un raisonnement de « descente » moins brutal que la méthode ci-dessus. On remarque que $842 = 1 + 29^2$ et on étudie les nombres $k = 1 + p^2$, où p est un nombre premier impair autre que 3.

$k = 842 = 2 \times 421$ (421 premier) et $k + 1 = 3b$ ($b = 281$ premier), donc les conditions nécessaires sont satisfaites. L'équation (1), « simplifiée » par 9, s'écrit : $x^2 - ky^2 = -bp^2$, avec $p = 29$ et $b = 281$. Elle implique que p^2 ($= k - 1$) divise $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, donc
– soit p divise x et y, ce qui donne, après simplification par p^2 : $x^2 - ky^2 = -b$ (1′),
– soit p^2 divise l'un des termes, par exemple $x - y$, et en posant $x = y + p^2 s$, on se ramène, après simplification par p^2, à : $(y - s)^2 - ks^2 = b$ (1″), équation qui ne diffère de la précédente que par le signe de b.

Comme la norme de $p + \sqrt{k}$ est -1, toute solution d'une de ces équations donne une solution de l'autre. En outre, à partir d'une solution (x, y) de (1′) vérifiant $y^2 > b$, on déduit une solution plus petite (x', y') de (1″) en posant[3] $y' = x - py$, $x' = y - py'$. Inversement, toute solution (x', y') de (1″) vérifiant $2py' > b$ fournit une solution plus petite (x'', y'') de (1′), avec $y'' = x' - py' > 0$, $x'' = y' - py''$. Or pour $k = 842$, $x^2 - 842y^2 = -281$ n'a aucune solution telle que $y^2 \leq 281$, soit $y \leq 16$, et $x'^2 - 842y'^2 = 281$ n'a aucune solution telle que $58y'^2 \leq 281$, soit $y' \leq 4$, donc (1) n'a aucune solution. On peut en dire autant pour $p = 79$ ($k = 6\,242$). Par contre, pour $p = 11$, 19, 61, 71 et 109 l'équation (1″) admet des « petites » solutions : (9, 1), (209, 11), (303, 5), (2 911, 41) et (89, 1) qui ne permettent pas la descente.

V. Un procédé de séparation des inconnues

Mise sous la forme : $x^2 - 3 = k'(y^2 - 3k'a^2)$, l'équation (1) montre que l'image de x dans $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}k'$ est l'une des « racines carrées de 3 » dans cet anneau. Si k' a j facteurs premiers distincts de 2 et de 3, le nombre de ces racines carrées de 3 est : 2^j, et elles viennent par paires $(g, -g)$. Soit c l'une d'entre elles : posons $c^2 - 3 = k'c'$. Si $x = k'w + c$, on doit avoir : (a) $y^2 = k'w^2 + 2cw + d = \mathrm{P}(w)$ (avec

(3) N.D.L.R. Cela revient à diviser $x + y\sqrt{k}$ par l'unité $p + q\sqrt{k}$.

$d = \dfrac{c^2 + b}{k'} = c' + 3k'a^2$ en notant $-b$ le second membre de (1)), plus rapide à résoudre que l'équation (1). En termes imagés, le polynôme P(w) fonctionne comme une « machine ». À un bout, on écrit $y^2 = P(w)$, on essaie les valeurs successives de w et, si l'on tombe sur un carré pour y^2, on trouve x à l'autre bout. Les simplifications par q^2 soit inévitables (§ II), soit destinées à fournir des solutions adéquates (§ III) reviennent à poser $w = qt + s'$, ce qui donne un nouveau système (a') : $y'^2 = k't^2 + 2st + r$, $x' = k't + s$, plus rapide. Exemple, pour $k = 443$: la simplification inévitable par 62 donne : $x^2 - 443y^2 = -16\,354$. Or modulo 443, $\sqrt{3} = 171$, et la congruence : $443w + 171 \equiv 0$ (6) équivaut à $w = 6t + 3$, $x = 443(6t + 3) + 171 = 6(443t + 250)$, soit $s = 250$ et $s^2 + b = 250^2 + 16\,354 = 443 \times 178$, d'où la machine (a') : $y'^2 = 443t^2 + 500t + 178$, $x' = 443t + 250$. Pour $t = -1$, -39 et 423, on trouve des solutions irréductibles ($U = 442 + 21\sqrt{443}$) de (1′) : (x', y') = (193, 11), (17 027, 809), donc des solutions (x, y) = ($6x'$, $6y'$) de (1) conduisant aux valeurs (-29, 4 873) et (16 805, 358 387) de (n, m).

APPENDICE I. Une équation diophantienne voisine

L'équation (2) : $x'^2 - k'y'^2 = 3(k + 1)$ est telle que toute solution $x' + y'\sqrt{k'}$ de (2) fournit deux solutions $x + y\sqrt{k'} = (x' + y'\sqrt{k'})(1 \pm a\sqrt{k'})$ de (1). Mais il y a des cas où (2) n'a pas de solutions alors que (1) en a. Ainsi, si $k \equiv 1$ (4) et $k' \equiv 1$ (4) (exemple : $k = 33$ ou 73). Dans d'autres cas, (2) a des solutions, mais elles ne fournissent pas toutes les solutions de (1). Exemple, $k = 122$. (2) fournit les solutions de la simplifiée (par 9) de (1) : (221, 21), (267, 25), (2 219, 201) et (2 661, 241) mais pas (99, 11) ni (5 467, 495), elles aussi irréductibles. Cependant :

> **Proposition.** si $k - 1$ est premier ou double d'un nombre premier, toute solution de (1) provient d'une solution de (2).

Exemple : $k = 59$, les solutions irréductibles (8, 1) et (169, 22) de (2′) $x^2 - 59y^2 = 5$ donnent toutes les solutions adéquates de (1), soit finalement (n, m) = (21, 413), (37, 531), (1 099, 8 673) et (1 437, 11 269).

On peut, par ailleurs, faire varier le facteur carré a^2 de $k = k'a^2$ en étudiant : $x^2 - 3 = k'(y^2 + 3a^2)$.

Pierre Samuel développe ce dernier point, ainsi qu'un appendice II sur les calculs pratiques : éliminer les multiples de 5, débarrasser k des facteurs 2 et 3 et vérifier que ce qui reste est $\equiv \pm 1$ (12). De même, $k + 1$, débarrassé des facteurs 2 et 3, doit être $\equiv 1$ (4). L'étude des derniers chiffres suffit souvent à voir qu'un nombre n'est pas un carré… Mais nous sommes malheureusement contraints d'abréger son texte. Il conclut en disant :

Outre Joseph Oesterlé et Karim Belabas, je tiens à remercier mon amie Françoise Pécaut dont les remarques m'ont permis de bien améliorer ma première rédaction.