SOLUTION

C'était pour introduire élémentairement la notion de résidu quadratique que Dominique Roux avait posé cet exercice, sous une forme simplifiée (étudier une à une les valeurs de $k \leq 11$), aux lycéens de Première et de Seconde du premier stage olympique d'Animath (Orléans, juillet 1998). Sur place, nous avons poursuivi nos investigations jusqu'à $k = 26$, mais je n'imaginais pas, lorsque j'ai proposé cet énoncé dans la présente rubrique, qu'il allait donner lieu à une étude aussi remarquable et approfondie que celle que m'a envoyée Pierre Samuel, avec la collaboration de Joseph Oesterlé et Karim Belabas notamment. Ce document est trop important pour être publié intégralement dans la présente rubrique, mais je consacrerai l'intégralité de la rubrique du prochain bulletin à en rendre compte le mieux possible, me limitant ce mois-ci à introduire le problème et à présenter les contributions des autres lecteurs.

Car j'ai reçu d'autres réponses, de Richard Blavy (31-Mervilla), Pierre Bornsztein (95-Courdimanche), Marie-Laure Chaillout (95-Sarcelles), Edgard Delplanche (94-Créteil), René Manzoni (76-Le Havre), Dominique Marselli (69-Decines), Charles Notari (31-Montaut), Pierre Renfer (67-Ostwald), qui généralement résolvent le problème tel qu'il était posé.

L'important, pour commencer, est de bien voir ce qui se passe pour $k = 2$ et pour $k =3$.
Pour $k = 3$, $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 3(n + 2)^2 + 2$ ne peut pas être un carré parfait, car un carré parfait n'est jamais congru à 2 modulo 3. Donc $3 \notin$ S. Alors que pour $k = 2$, $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 = m^2$ équivaut à : $(2n + 3)^2 + 1 = 2m^2$, équation de Pell-Fermat qui admet une infinité de solutions. Donc $2 \in$ S. Plus précisément, pour tout entier q, si a_q et m_q sont les entiers vérifiant : $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2q+1} = a_q + m_q\sqrt{2}$, donc : $\left(1-\sqrt{2}\right)^{2q+1} = a_q - m_q\sqrt{2}$, il est clair que : $a_q^2 - 2m_q^2 = (-1)^{2q+1}$, donc a_q est impair et il existe n_q vérifiant $2n_q + 3 = a_q$, tel que (n_q, m_q) soit solution de l'équation.

Ce dernier résultat vaut pour bien d'autres valeurs de k, par exemple (contrairement à ce que prétend un des lecteurs) $k = 26$: Appelons désormais (E_k) l'équation :

$$(n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + k)^2 = m^2.$$

(E_{26}) : $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + 26)^2 = m^2$ peut s'écrire :

$$(26n + (13 \times 27))^2 + 195^2 = 26\mathrm{m}^2.$$

Si a_q et b_q sont les deux entiers tels que : $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2q+1} = a_q + b_q\sqrt{26}$, $a_q^2 - 26b_q^2 = -1$, donc a_q est impair et il existe n_q et m_q définis par : $2n_q + 27 = 15a_q$, $m_q = 195n_q$, qui vérifient (E_{26}).

Plus généralement, Pierre Bornsztein établit que si k n'est pas un carré parfait et si (E_k) admet au moins une solution (n, m) avec n non nécessairement positif, elle en admet une infinité avec $n \geq 0$. En effet, de manière très générale, (E_k) peut s'écrire (E'_k) :

$$k(2n+(k+1))^2 + \frac{k(k^2-1)}{3} = 4m^2.$$

Or l'équation de Pell-Fermat : $u^2 - kv^2 = 1$ admet une infinité de solutions si k n'est pas un carré. Soit (u, v) l'une d'entre elles $(u > 1, v > 0)$, et (n, m) une solution de (E_k) : quitte à remplacer n par $(- n - k - 1)$, ce qui ne change pas la somme, on peut supposer : $n \geq -\frac{k+1}{2}$ et $m > \frac{k+1}{2}$ car $m^2 \geq \frac{k-1}{2}\frac{k(k+1)}{6}$. Dès lors, posons : $a = 2n + (k + 1) \geq 0$.

$\left(2m+a\sqrt{k}\right)\left(u+v\sqrt{k}\right)=2m'+a'\sqrt{k}$, avec : $m'=mu+\dfrac{kav}{2}>m$ et $a'=2mv+au$,

donc $n'=mv+n+\dfrac{a(u-1)}{2}\geq m+n>-1$. m' et n' sont entiers (car si k est pair, a et u sont impairs, et si k est impair, a est pair), et ils vérifient : $m'^2-ka'^2=m^2-ka^2$, de sorte que (n', m') est une nouvelle solution de (E'_k), avec en outre $n'\geq 0$ et $m'>m$.

Mais cela ne prouve nullement qu'il existe une infinité de k appartenant à S et une infinité de k n'appartenant pas à S, ni qu'il existe des carrés appartenant à S et (éventuellement) des carrés n'appartenant pas à S. Pour prouver qu'il existe une infinité de k appartenant à S, Richard Blavy écrit :

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+k)^2=\frac{k}{6}\left[(6n^2+6n+1)+k(6n+2k+3)\right].$$

Si $k=6n^2+6n+1$, $6n+2k+4=6(n+1)(2n+1)$, et donc

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+k)^2=k^2(n+1)(2n+1)$$

est un carré si et seulement si $(n+1)$ et $(2n+1)$ sont tous deux des carrés : il suffit que $n=v^2-1$ pour une solution quelconque (u, v) de $u^2-2v^2=-1$. Pierre Bornsztein, lui, étudie les $k=12c^2-1$ (qui ne peuvent pas être des carrés, car congrus à 2 modulo 3) :

$$\text{si } n=c-\frac{k+1}{2} \text{ et } m=kc,\ k(2n+(k+1))^2+\frac{(k-1)k(k+1)}{3}=4m^2.$$

Certes, $n=c-6c^2$ est négatif, mais à partir de cette solution (n, m) et d'une solution quelconque (u, v) de l'équation de Pell-Fermat : $u^2-kv^2=1$, on peut construire une infinité de solutions (nq, mq) vérifiant : $nq\geq 0$. Edgard Delplanche généralise à : $k=3c^2-1$, avec c impair :

$$\text{si } n=\frac{c-3c^2}{2} \text{ et } m=\frac{kc}{2},\ k(2n+(k+1))^2+\frac{(k-1)k(k+1)}{3}=4m^2.$$

Cela étant, le cas le plus simple à étudier, c'est quand même les carrés parfaits. Si $k=c^2$, l'équation (E'_k) s'écrit :

$$m^2-\left(cn+\frac{c(c^2+1)}{2}\right)^2=\frac{c^2(c^4-1)}{12}.$$

En posant $a=cn+\dfrac{c(c^2+1)}{2}$, et $B=\dfrac{c^2(c^4-1)}{12}$, nous sommes ramenés à : $(m-a)(m+a)=B$. Or B n'a qu'un nombre fini de diviseurs, il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini de solutions. Plusieurs lecteurs ont montré que si c n'est multiple ni de 2 ni de 3, donc si c^4-1 est divisible par 12 (et même par 48), (E'_k) en admet au moins une. Par exemple, celle qui vérifie : $m - a = 2c$, $m + a = \dfrac{c(c^4 - 1)}{24}$, soit :

$$m = c\left(\frac{c^4 - 1}{48} + 1\right) \text{ et } n = \frac{c^4 - 1}{48} - \frac{c^2 + 3}{2}.$$

Marie-Laure Chaillout remarque toutefois qu'il convient d'exclure $c = 5$, la valeur de n ci-dessus étant alors négative. Tel que l'énoncé est formulé, la seule somme de 25 carrés consécutifs qui soit un carré, $0^2 + 1^2 + \ldots + 24^2 = 70^2$, ne convient pas : $25 \notin$ S. D'ailleurs, existe-t-il d'autres valeurs de $k > 2$ pour lesquelles $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 24^2$ soit un carré ? vraisemblablement pas ! mais cela reste à prouver.

Maintenant, si $k = c^2$ avec c pair ou multiple de 3, c'est en écrivant (E_k) sous forme (E''_k) :

$$k\,[6n^2 + 6(k + 1)n + (k + 1)(2k + 1)] = 6m^2,$$

comme le propose Pierre Samuel, que l'on conclut le plus rapidement. En effet, si l'on pose $A = 6n^2 + 6(k + 1)n + (k + 1)(2k + 1)$, $c^2\,[6A] = (6m)^2$, ce qui entraîne que 6A est un carré parfait, donc que A est multiple de 6. Or si k est pair ou multiple de 3, $(k + 1)(2k + 1)$ n'est pas multiple de 6.

Comme le constate Pierre Renfer, l'équation (E''_k) n'a pas non plus de solutions lorsque $k = 3c$ si $c \equiv 1 \pmod 3$. En simplifiant par 6, on devrait avoir :

$$3cn^2 + 3c(3c + 1)n + \frac{c(3c + 1)(6c + 1)}{2} = m^2.$$

Or $\dfrac{c(3c + 1)(6c + 1)}{2} \equiv 2 \pmod 3$, et un carré m^2 ne peut pas être congru à 2 modulo 3. Edgard Delplanche étudie plus généralement les multiples de 3 en posant : $k = 3d^2c$, où c n'a pas de facteurs carrés. Comme d^2c divise $2m^2$, dc divise $2m$, et en posant $2m = dcm'$ on doit avoir : $cm'^2 = 12n^2 + 12(k + 1)n + 2(k + 1)(2k + 1) \equiv 2 \pmod{12}$, ce qui n'est possible que si $c \equiv 2 \pmod{12}$. Marie-Laure Chaillout exclut également les $k = 2^{2q}c$, avec c impair : l'exposant de 2 est pair dans le membre de gauche de (E''_k), impair dans celui de droite. Richard Blavy, qui écrit (E''_k) sous forme :

$$k[(6n^2 + 6n + 1) + k(6n + 2k + 3)] = 6m^2,$$

remarque que $6n^2 + 6n + 1$ n'est jamais divisible ni par 5 ni par 7, de sorte que si, dans la décomposition de k en facteurs premiers, l'exposant de 5 ou 7 est impair, il est impair dans le membre de gauche et pair dans celui de droite. Enfin, Pierre Bornsztein établit que s'il existe un nombre premier $p \equiv 3 \pmod 4$, $p > 3$, dont l'exposant, dans la décomposition de $(k + 1)$, est impair, alors $k \notin$ S. Pour ce faire, il écrit (E"k) sous la forme :

$$(6m)^2 + (6n + 3k + 3)^2 = (k + 1)\,[(6n + 3k + 3)^2 + 3k(k - 1)].$$

Si $p \equiv 3 \pmod 4$ divise une somme de carrés, il divise chacun des deux carrés : son exposant dans le membre de gauche est donc pair. Or p ne divise ni k ni $(k-1)$ ni, par conséquent : $(6n+3k+3)^2+3k(k-1)$, et son exposant dans le membre de droite est impair. Il en résulte que si $k \in$ S, $k+1$ peut s'écrire soit u^2+v^2, soit $3(u^2+v^2)$, avec $u \geq v \geq 0$.

Pierre Bornsztein en déduit que les éléments de S ont une densité nulle, autrement dit : si $N(x)$ désigne le nombre d'éléments de S inférieurs ou égaux à x, $N(x) = o(x)$. Il est clair, par ailleurs, que $N(x) > \frac{1}{3}\sqrt{x}$, vu qu'un tiers des carrés appartient à S, mais pour majorer $N(x)$, Pierre Bornsztein utilise un théorème de la page 254 de : I. Niven et H. Zuckerman, *An introduction to the theory of numbers*, publié chez J. Wiley and sons :

Soit A inclus dans **N**. Pour tout p premier, on pose

$$A_p = \{K \in A \mid p \text{ divise } K \text{ et } p^2 \text{ ne divise pas } K\}.$$

S'il existe une suite strictement croissante $(p_i)_{i\geq 1}$ de nombres premiers tels que $\sum \frac{1}{p_i}$ diverge et, pour tout $i \geq 1$, A_{p_i} est de densité nulle, alors A est de densité nulle.

En choisissant pour suite (p_i) les nombres premiers congrus à 3 modulo 4, donc la moitié des nombres premiers, il est clair que $\sum \frac{1}{p_i}$ diverge et que les A_{p_i} sont tous vides, d'où le résultat.

Mais il reste une infinité de valeurs à étudier ! Les premières peuvent être abordées à la main : pour $k = 5$, la somme de 5 carrés consécutifs est divisible par 5 et n'est divisible par 25 que si celui du milieu est congru à 2 modulo 5, ce qui est impossible. Méthode analogue pour $k = 7$. Pour $k = 8$, $8(2n+9)^2 + 168 \equiv 48 \pmod{64}$ ne peut pas être un carré $4m^2$, car $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ serait congru à 3 modulo 4. Dominique Roux et moi avions parcouru ainsi, en juillet 1998, tous les $k \leq 26$ dont seuls 2, 11 ($n = 17$), 23 ($n = 6$), 24 ($n = 0$) et 26 ($n = 24$) appartiennent à S. Au delà, Pierre Samuel a déterminé à la main, par sa méthode de réduction à une équation diophantienne, les 317 valeurs (non carrées) de $k \leq 5\,000$ qui sont dans S : 2, 11, 23, 24, 26, 33, 47, 50, 59, 73, 74, 88, 96, 97, …, étudiant par une méthode spécifique $k = 842$, pour lequel il n'existe pas de solution bien que les conditions nécessaires soient satisfaites. À l'aide d'un ordinateur, Karim Belabas a poursuivi l'investigation trouvant 4 799 « bonnes » valeurs de $k \leq 10^6$. Cette étude de Pierre Samuel fera l'objet de la prochaine rubrique.