SOLUTION

Quand on apprend que la série harmonique diverge, que la série des inverses des nombres premiers diverge également, mais beaucoup moins vite, alors que la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ converge aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on est amené à s'interroger sur la « frontière entre les plus petites séries divergentes et les plus grandes séries convergentes ». Cet exercice fournit un élément de réponse : pour toute série convergente (α_n), il existe une série convergente (β_n) telle que α_n soit négligeable devant β_n.

J'ai reçu des solutions de André BELET (12-Onet le Chateau), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jean-Christophe LAUGIER (17-Rochefort), Denis LIEUTIER (95-Cergy), Dominique MONCORGÉ (43-Le Puy en Velay), Bernard PETIT (29-Brest), Pierre RENFER (67-Ostwald), Marc ROUX (30-Nîmes) et quatre solutions fausses.

Les démonstrations se ramènent toutes à ceci :

La série (α_n) étant convergente, la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy, d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in N, \forall p \geq m, \forall q \geq p, \left|\sum_{n=p}^{q} \alpha_n\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

On choisit deux « bonnes suites » (λ_i) et (ε_i) telles que la série de terme général ($\lambda_i\varepsilon_i$) soit convergente, par exemple : $\lambda_i = i$ et $\varepsilon_i = \frac{1}{i^3}$, ou bien $\lambda_i = 2^i$ et $\varepsilon_i = 4^{-i}$… La relation (1) ci-dessus permet de définir une suite croissante d'entiers A_i telle que pour tout p et tout q vérifiant : $A_i \leq p \leq q \leq A_{i+1}$, $\left|\sum_{n=p}^{q} \alpha_n\right| < \varepsilon_i$, donc $\left|\sum_{n=p}^{q} \lambda_i\alpha_n\right| < \lambda_i\varepsilon_i$: ε_i étant donné, (1) permet de trouver un m_i, et A_i est l'un quelconque des entiers supérieurs ou égaux à m_i et strictement supérieurs à A_{i-1}. En posant $k_n = \lambda_i$ pour $A_i \leq n < A_{i+1}$, la série de terme général $k_n\alpha_n$ est bien convergente : quels que soient p et q tels que $A_u \leq p \leq A_{u+1}$ et $A_v \leq q \leq A_{v+1}$ ($u \leq v$ et $p \leq q$), on voit en segmentant la somme que : $\left|\sum_{n=p}^{q} k_n\alpha_n\right| < \sum_{i=u}^{v} \lambda_i\varepsilon_i$, or la série $\lambda_i\varepsilon_i$ est convergente par hypothèse.

Le choix des A_i doit être fait avec rigueur, A_0 n'étant pas nécessairement 0 (les questions de convergence sont indépendantes des premiers termes de la série). Par contre, le fait que k_n soit entier ne joue aucun rôle ; il autorise juste la remarque que, si k_n est entier, la suite (k_n) ne peut pas être strictement croissante (sinon k_n serait supérieur ou égal à n, et $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ serait un contre exemple). Le signe de α_n est, lui aussi, sans importance (l'énoncé initial supposait $\alpha_n > 0$, mais Marie-Laure CHAILLOUT se place dans un espace de Banach quelconque), si ce n'est que, lorsque la série (α_n) est à termes positifs, d'autres démonstrations sont envisageables : en posant $R_n = \sum_{k>n} \alpha_k$, l'auteur du problème appelle A_i le plus petit entier tel que $R_{A_i} \leq \frac{S}{2^i}$ ($A_0 = -1$). Comme $\sum_{i \geq 0} \frac{S}{2^i} = 2S$, si l'on pose $k_n = i$, pour $A_i < n \leq A_{i+1}$ on peut permuter les sommations et trouver : $\sum_{n \geq 0} k_n\alpha_n \leq 2S$. Également, la série de terme général $R_{n^{-t}}\alpha_n$ est convergente pour tout $t \in \,]0,1[$: il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis à $R_{(n-1)^{1-t}} - R_{n^{1-t}}$ (exercice « très classique » signalé par Bernard PETIT). Marie-Laure CHAILLOUT renvoie, elle, à l'exercice 7, p. 101, fascicule XXVIII des *Éléments d'analyse (fondements de l'analyse moderne)* de Jean Dieudonné (Éditions Gauthier Villars, 1968) et Denis LIEUTIER propose l'exercice suivant : soit (α_n) une suite strictement croissante de limite infinie, la suite

$\left(\frac{\alpha_n}{n^2}\right)$ étant à valeurs dans [0;1]. $\left(\frac{\alpha_n}{n^2}\right)$ est-elle convergente ? Pas nécessairement : il suffit de poser $\alpha_n = 2^k n$ pour $2^k \leq n < 2^{k+1}$ pour s'en convaincre.

Mais la principale cause d'erreur est de vouloir calculer k_n directement à partir de α_n, ce qui est impossible par quelque méthode que ce soit.

Plus précisément : soit f une fonction continue, strictement positive, $f(x)$ tendant vers l'infini lorsque x tend vers 0. Aussi lente que soit la divergence de la fonction f, il existe une série (α_n) convergente telle que la série de terme général $f(\alpha_n) \cdot \alpha_n$ soit divergente. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α_0 strictement compris entre 0 et 1 tel que $\alpha_0 + \frac{1}{f(\alpha_0)} = 1$, et plus généralement, pour tout $n \geq 1$, il existe α_n strictement compris entre 0 et α_{n-1} tel que : $\alpha_n + \frac{1}{f(\alpha_n)} = \frac{1}{f(\alpha_{n-1})}$. La suite α_n décroît, donc converge, sa limite ne peut être que 0, et $f(\alpha_n)$ tend vers l'infini. La série de terme général α_n converge donc vers 1, car : $\sum_{n=0}^{q} \frac{1}{\alpha_n} = 1 - \frac{1}{f(\alpha_q)}$. La série de terme général $f(\alpha_n) \cdot \alpha_n = \frac{f(\alpha_n)}{f(\alpha_{n-1})} - 1$ est, elle, minorée par la suite $\ln(f(\alpha_q))$, vu que pour tout x positif, $x > \ln(1 + x)$. Elle est donc divergente.