

Solution

Le véritable auteur du problème (formulé plus généralement : cf <http://www.mjc-andre.org/pages/amej/sujets/pliage/sujet.htm>), c'est Olivier Bodini. « Ce n'est pas un problème lié à mes recherches, précise-t-il dans un mél. En fait, je cherchais pour les jeunes un indice de dissymétrie attractif. Le rapport de l'aire P du pliage optimal sur l'aire S du triangle me paraissait assez pertinent. Un corollaire du problème est de déterminer un triangle le plus dissymétrique possible. En d'autres termes, $\frac{1}{2} \leq \frac{P}{S} \leq x$, que vaut x ? Il existe dans la littérature d'autres indices de dissymétrie comme l'aire du plus grand ensemble symétrique inclus. Je pense que cela diffère peu de ce que je propose ».

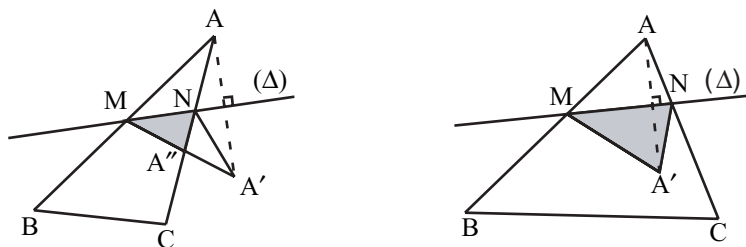
Il est audacieux de proposer ainsi à des collégiens un problème relativement ouvert, et c'est pour encourager les initiatives de MATH.en.JEANS (<http://mathenjeans.fr.st>) visant à « mettre les jeunes aux prises avec d'authentiques problèmes » que j'ai sélectionné cet énoncé. Avec une approche empirique, les élèves élaborent des stratégies de recherche, apprenant à cerner les concepts manipulés. En 1997, les élèves de Première du lycée Jules Ferry de Coulommiers (77) avaient déjà travaillé le sujet dans le cas où la partie repliée restait intérieure au triangle, et concluaient « Étude du deuxième cas [la pliure ne passe pas par un sommet] : nous n'avons pas eu le temps de démontrer un résultat semblable au premier cas, mais il semble que la bissectrice ne soit pas toujours la meilleure façon de plier le triangle » (Pliage d'un triangle, in *Actes MeJ 1997*, p. 125-127, ou sur Internet : <http://mathenjeans.free.fr/actespdf/97125127.pdf>).

En 1999, les collégiens de quatrième de St-Brice et de Montmorency (95) se limitaient au triangle rectangle (<http://www.mjc-andre.org/pages/amej/edition/9901plit/99plitri.html>), concluant : « Mais bien des questions restent encore. Nous avons fait l'hypothèse, après de nombreuses manipulations, que c'était forcément une bissectrice qui était la réponse dans le cas des triangles rectangles. Mais nous n'en sommes pas vraiment certains puisque nous ne l'avons pas démontré. Et que se passe-t-il si le triangle n'est pas rectangle ? ». Ce problème a été repris en 2002 dans

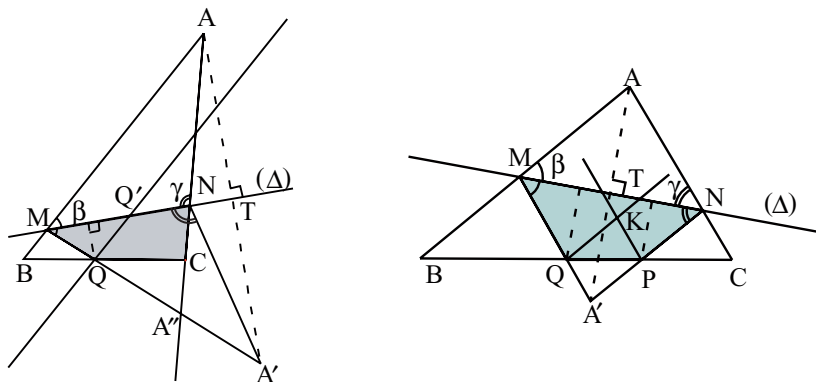
ces mêmes collègues, une terminologie a émergé : pour un pliage donné, $2 - \frac{2P}{S}$ peut être appelé « rendement du pliage », et son maximum, pour un triangle donné, « pliabilité » du triangle. Si l'on généralise le problème, la pliabilité d'un quadrilatère ou d'un convexe quelconque est-elle au moins égale à celle d'un triangle ?

Sans aller jusque là, rien que l'énoncé formulé dans la présente rubrique, dans le cas du triangle quelconque, est redoutable. Même un habitué de la géométrie du triangle et de l'étude de fonctions se perd facilement dans des calculs rébarbatifs, et pour cause ! Seul René Manzoni (76-Le Havre) a pris la peine de rédiger une solution complète, pour constater que, contrairement aux attentes, le meilleur pliage n'est pas nécessairement selon une bissectrice du triangle.

Pour être rigoureux, on ne peut pas faire l'économie de l'étude systématique de tous les pliages possibles. Soit donc ABC un triangle. Classiquement, on notera $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs de ses trois côtés, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$ ses trois angles, S son aire et $S(\Delta)$ l'aire du « triangle replié » autour de la droite (Δ) – droite que nous appellerons désormais, comme MATH.en.JEANS 1997, « pliure ». On supposera que le triangle n'est pas isocèle, sinon la meilleure pliure serait bien évidemment l'axe de symétrie. Cela étant dit, il est clair que la pliure (Δ) coupe deux des côtés du triangle, que nous supposons être $[AB]$ et $[AC]$, sans exclure le cas où cette droite passe par B ou C.



Appelons M et N les intersections de (Δ) avec $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, A' le symétrique de A par rapport à (Δ). Choisissons une direction de droite, et déplaçons (Δ) parallèlement à cette direction, en partant de A. Deux cas se présentent : soit la perpendiculaire à (Δ) issue de A est extérieure au triangle (premier cas), soit elle est intérieure (deuxième cas) – le cas limite où (Δ) est perpendiculaire à l'un des côtés du triangle étant en définitive le plus intéressant. Dans le premier cas, on peut supposer, quitte à permuter B et C, que c'est $[NA']$ qui est extérieur au triangle, $[MA']$ coupant (AC) en A'' . Notons que, dans ce premier cas, l'angle \widehat{A} est nécessairement aigu. Dans les deux cas, lorsque (Δ) est suffisamment proche de A, le triangle replié est privé d'un secteur triangulaire MNA'' (premier cas) ou MNA' (deuxième cas), de forme constante, dont l'aire, proportionnelle à MN^2 , croît jusqu'à ce que A' , A'' ou (Δ) traverse $[BC]$.



Si A' ou A'' traverse $[BC]$ avant (Δ) , le triangle replié est alors privé d'un quadrilatère $MNCQ$ dans le premier cas ($Q = (MA') \cap (BC)$), $MNPQ$ dans le second ($P = (NA') \cap (BC)$), dont l'aire peut passer par un maximum avant que l'un des points M ou N n'atteigne B ou C . Dès lors, le meilleur pliage est réalisé soit pour une pliure passant par un sommet B ou C , soit lorsque ce quadrilatère $MNCQ$ ou $MNPQ$ est d'aire maximale, ce que nous déterminerons d'abord pour une direction de droite donnée, ensuite indépendamment de cette direction.

Un mot, pour commencer, du cas particulier où la pliure passe par un sommet, bien qu'on puisse aussi l'aborder comme un cas limite du cas général que nous traiterons par la suite. Pris isolément, ce cas présente une réelle difficulté : on ne peut pas affirmer que la meilleure pliure passant par B est la bissectrice de \widehat{B} , car si, par exemple, $a = 2$, $b = 17$ et $c = 18$, le pliage selon la bissectrice de \widehat{B} a un rendement de 20 % alors que le pliage selon la médiane a un rendement supérieur à 25 %. Mais, dans cet exemple, le rendement du pliage selon la bissectrice de \widehat{A} est supérieur à 97 %, et en règle générale le rendement du pliage selon une droite passant par un sommet est toujours inférieur au rendement du pliage selon une bissectrice : comment formuler cela de manière démontrable ?

Rappelons que le pied J de la bissectrice issue de B partage AC dans le rapport

$$\frac{JC}{JA} = \frac{a}{c}. \text{ Quitte à permuter } A \text{ et } C, \text{ supposons } a < c. \text{ Si } N \text{ est sur } [JC], \text{ la pliure } (\Delta) = (BN) \text{ ampute le triangle d'une surface incluse dans } BNC, \text{ a fortiori dans } BJC,$$

et le rendement : $2 - \frac{2S(\Delta)}{S}$ de ce pliage est manifestement inférieur au rendement

$\frac{2a}{a+c}$ du pliage selon (BJ) . Mais quand N est sur $[JA]$, la pliure ampute le triangle de la surface BNA'' . Posons

$\beta = \widehat{ABN} = \widehat{NBA''}$. Si l'on fait tourner (BN) d'un angle infinitésimal $d\beta$, BA'' tourne de $2d\beta$ et l'aire de BNA''

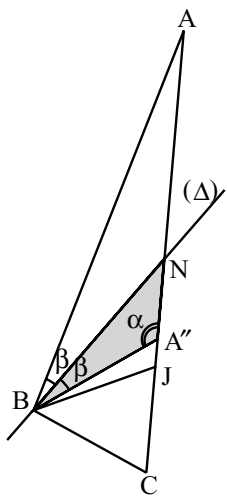
s'accroît de $\left(-\frac{BN^2}{2}\right)d\beta + BA''^2 d\beta$: elle sera monotone

sur $\left[0, \frac{\widehat{B}}{2}\right]$ sauf s'il existe des points N de $[AJ]$ pour

lesquels $BN > BA''\sqrt{2}$, auquel cas elle atteindra son maximum pour l'un des triangles BNA'' vérifiant

$BN = BA''\sqrt{2}$. Appelons BN_0A_0 ce triangle optimal. L'aire

de ce triangle sera $\frac{A_0N_0}{AC} \cdot S$, et le rendement de n'importe



quel pliage selon une droite passant par B sera majoré par :

$$2 \frac{A_0 N_0}{AC} \leq 2 \frac{A_0 N_0}{AA_0}.$$

Or

$$\frac{BN_0}{BA} = \frac{\sin \widehat{A}}{\sin(\widehat{A} + \beta)},$$

et si l'on appelle α l'angle $\widehat{BA_0A}$,

$$\frac{BN_0}{BA_0} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\widehat{A} + \beta)}.$$

Comme $\widehat{A} + \alpha = \pi - 2\beta$, $\sin \widehat{A} + \sin \alpha = 2 \cos \beta \cdot \sin(\widehat{A} + \beta)$, donc

$$\frac{BN_0}{BA_0} + \frac{BN_0}{BA} = 2 \cos \beta < 2.$$

Si $\frac{BN_0}{BA_0} = \sqrt{2}$, $\frac{BN_0}{BA} < 2 - \sqrt{2}$, donc $\frac{BA_0}{BA} < \sqrt{2} - 1$ et

$$2 \frac{A_0 N_0}{AA_0} = 2 \frac{BA_0}{BA_0 + BA} < 2 - \sqrt{2}.$$

En d'autres termes, le rendement du pliage selon une droite passant par B est soit inférieur au rendement du pliage selon la bissectrice de \widehat{B} , soit inférieur à $2 - \sqrt{2}$. Par ailleurs, dans tout triangle, le pliage selon la meilleure bissectrice a un rendement supérieur à $3 - \sqrt{5}$, donc *a fortiori* à $2 - \sqrt{2}$. Supposons $a < b < c$. Les pliages selon les bissectrices ont pour rendements : $\frac{2a}{a+b}$, $\frac{2a}{a+c}$ et $\frac{2b}{b+c}$, le meilleur est

$\frac{2a}{a+b}$ si $b^2 \leq ac$, $\frac{2b}{b+c}$ si $b^2 > ac$. Mais, en utilisant l'inégalité triangulaire, si

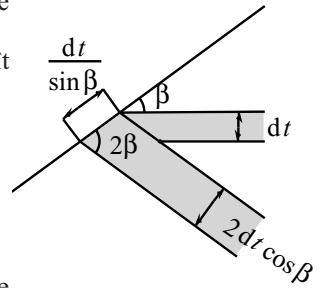
$b^2 \leq ac < a(a+b)$, $\frac{b}{a}$ est compris entre les racines de $x^2 - x - 1 = 0$, donc

$\frac{2a}{a+b} > 3 - \sqrt{5}$. Si $b^2 \geq ac > (c-b)c$, c 'est $\frac{2b}{b+c}$ qui est supérieur à $3 - \sqrt{5}$, ce qui achève la démonstration de ce cas particulier.

Intéressons-nous désormais au cas général. Soit T le projeté orthogonal de A sur (Δ) , β l'angle \widehat{NMA} et γ l'angle \widehat{ANM} (cf. dernière figure de la page 109). Lorsque AT augmente d'une grandeur infinitésimale dt, le triangle AMN s'accroît d'une

bande de largeur dt et de longueur MN . Le point M se déplace sur AB de : $\frac{dt}{\sin \beta}$, et le triangle BMQ décroît d'une bande de longueur MQ et de largeur :

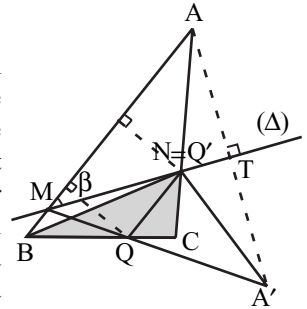
$$\sin 2\beta \cdot \frac{dt}{\sin \beta} = 2 dt \cdot \cos \beta.$$



Dans le premier cas, où $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$, l'aire du triangle replié vaut :

$$S(\Delta) = \text{aire}(\text{AMN}) + \text{aire}(\text{BMQ}),$$

elle décroît tant que $MN - 2MQ \cos \beta < 0$ et atteint son minimum quand $MN - 2MQ \cos \beta = 0$. Or, si on appelle Q' le point où la parallèle à (AB) passant par Q coupe (MN) , $MQ' = 2MQ \cos \beta$: le minimum est donc atteint lorsque $Q' = N$, ce qui se produit nécessairement, car $(QQ') \parallel (AB)$ coupe (MN) extérieurement au triangle si $A'' = C = Q$, intérieurement si $N = C$ (Q sur $[BC]$) ou $M = B = Q = Q'$. En ce minimum, (NQ) étant parallèle à (AB) , les triangles BMQ et BMN ont même base BM et même hauteur, donc même aire ; l'aire du triangle replié vaut donc



$$S(\Delta) = \text{aire}(\text{AMN}) + \text{aire}(\text{BMQ}) = \text{aire}(\text{ABN}) = \frac{AN}{AC} \cdot S.$$

Par ailleurs, dans le triangle AMN , $\frac{AM}{\sin \beta} = \frac{MN}{\sin \widehat{A}} = \frac{2MQ \cdot \cos \beta}{\sin \widehat{A}}$ et, d'après le

théorème de Thalès, $\frac{NQ}{AB} = \frac{NC}{AC}$, de sorte qu'en appelant x la longueur AN ,

$$MQ = NQ = \frac{c}{b}(b-x) = \frac{x \sin \widehat{A}}{\sin 2\beta}. \text{ On en déduit : } x = \frac{bc \sin 2\beta}{c \sin 2\beta + b \sin \widehat{A}}, \text{ et le}$$

rendement maximal d'un pliage selon une droite de cette direction vaut :

$$s(\beta) = 2 - \frac{2x}{b} = \frac{2b \sin \widehat{A}}{c \sin 2\beta + b \sin \widehat{A}}.$$

Si maintenant on fait varier β , $s(\beta)$ est maximum lorsque $\sin(2\beta)$ est minimum.

Or β varie de $\frac{\widehat{B}}{2}$ à $\frac{\pi}{2} - \widehat{A}$: si $\beta < \frac{\widehat{B}}{2}$, (Δ) coupe $[BC]$ avant A'' et nous n'avons

jamais de quadrilatère $MNCQ$; si $\beta > \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond au second

cas. Si maintenant $\frac{\widehat{B}}{2} > \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$, ce premier cas n'est jamais réalisé : soit (Δ) coupe $[BC]$ avant A'' , soit (AT) est intérieur au triangle. Dans le cas présent, où $\frac{\widehat{B}}{2} < \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$ (soit $\widehat{C} > \widehat{A}$), 2β décrit l'intervalle $[\widehat{B}, \pi - 2\widehat{A}]$ inclus dans $[0, \pi]$, sur lequel la fonction sinus est concave, elle atteint donc son minimum en l'une des extrémités de l'intervalle, mais pas nécessairement en $\beta = \frac{\widehat{B}}{2}$: pour peu que $\pi - 2\widehat{A} > \pi - \widehat{B}$, soit $\widehat{B} > 2\widehat{A}$, le minimum est atteint en $\beta = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$, c'est-à-dire lorsque la pliure est perpendiculaire à (AC) . En $\beta = \frac{\widehat{B}}{2}$, comme $b \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{B}$, $s(\beta) = \frac{2a}{c+a}$, ce qui correspond au pliage selon la bissectrice de B. Mais en $\beta = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$,

$$s(\beta) = \frac{2a}{2c \cos \widehat{A} + b} = \frac{2b^2}{2b^2 + c^2 - a^2},$$

ce qui peut fort bien être supérieur.

Résultat surprenant car, dans ce cas, la pliure optimale n'est pas une droite remarquable du triangle : certes, le point N est conjugué harmonique de A par rapport au milieu de $[AC]$ et au pied de la hauteur, mais que dire de plus ? Nous appellerons une telle pliure « perpendiculaire optimale », et l'exemple $a = 3$, $b = 6$ et $c = 4$ (ou le triangle rectangle $a = 20$, $b = 29$, $c = 21$) suffit à montrer qu'une perpendiculaire optimale peut effectivement être meilleure que toutes les bissectrices. Il aurait été intéressant de signaler un tel exemple aux élèves pour les amener à préciser les conditions de validité de leurs résultats et faire avancer leur recherche.

Cela étant dit, n'oublions pas notre deuxième cas, où la droite (AT) , perpendiculaire à (Δ) , est intérieure au triangle. Nous avons alors trois triangles à considérer, AMN, BMQ, CNP, et quand AT augmente de dt , l'aire de AMN s'accroît de $MN \cdot dt$, l'aire de BMQ décroît de $MQ \cdot (2dt \cdot \cos \beta)$ et l'aire de CNP décroît de $NP \cdot (2dt \cdot \cos \gamma)$, de sorte que la somme :

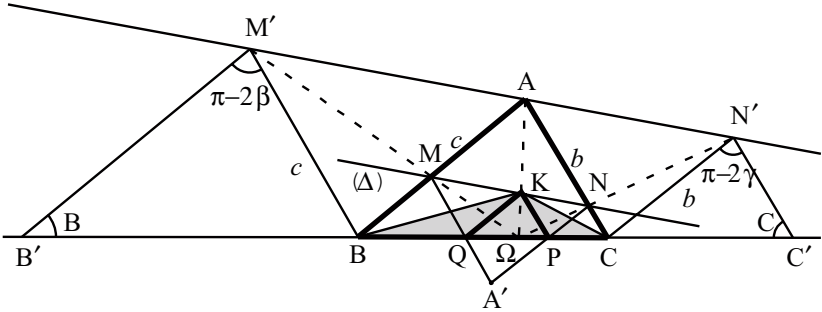
$$S(\Delta) = \text{aire(AMN)} + \text{aire(BMQ)} + \text{aire(CNP)}$$

continuera de décroître tant que $MN < 2MQ \cdot \cos \beta + 2NP \cdot \cos \gamma$: si la parallèle à (AC) passant par P et la parallèle à (AB) passant par Q se coupent en K, cette condition équivaut au fait que K est entre (Δ) et (BC) , le minimum de $S(\Delta)$ étant atteint lorsque K est sur (Δ) . Or les triangles KQP et ABC ont leurs côtés parallèles : il existe une homothétie de centre Ω et de rapport k transformant KQP en ABC. Par ailleurs, (KQ) et (KP) étant parallèles à (AB) et (AC) , les triangles KBM et KCN ont

même aire respectivement que QBM et PCN, et l'aire du triangle replié vaut :

$$S - \text{aire}(KBC) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot S,$$

vu que la hauteur de KBC est k fois plus petite que la hauteur de ABC. Cette aire est l'aire minimale du triangle replié selon une droite de cette direction, et si l'on fait varier la direction, elle est elle-même minimale lorsque k est minimal.



Il suffit donc de calculer k , le point K étant sur (Δ) . L'homothétie transformant KQP en ABC transforme les points M, N, B, C en respectivement M', N', B', C', et :

$$k = \frac{B'C'}{BC}. \text{ Mais en outre : } BM' = c, \text{ donc } B'B = \frac{c}{\sin \widehat{B}} \sin(2\beta), \text{ et de même}$$

$$CC' = \frac{b}{\sin \widehat{C}} \sin(2\gamma), \text{ soit}$$

$$k = 1 + \frac{c^2 \sin(2\beta) + b^2 \sin(2\gamma)}{ac \sin \widehat{B}},$$

vu que $b \sin \widehat{C} = c \sin \widehat{B}$. Comme $\beta + \gamma = \widehat{B} + \widehat{C}$, on peut poser $\beta = \widehat{B} + \theta$ et $\gamma = \widehat{C} - \theta$ pour constater que k est une fonction concave de θ qui atteint son minimum en une extrémité de l'intervalle de définition. En effet, θ varie de

$$\sup \left(\widehat{C} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\widehat{B}}{2} \right) \text{ à } \inf \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B}, \frac{\widehat{C}}{2} \right), \text{ de sorte que } 2\beta \text{ et } 2\gamma \text{ sont toujours compris entre}$$

0 et π : tous les termes de k sont donc positifs et la dérivée seconde,

$$\frac{-4c^2 \sin(2\widehat{B} + 2\theta) - 4b^2 \sin(2\widehat{C} - 2\theta)}{ac \sin \widehat{B}}$$

est manifestement négative. Or la borne inférieure de l'intervalle de définition correspond à une perpendiculaire à (AC) si $\widehat{A} < \widehat{C}$, la bissectrice de \widehat{B} sinon, et la borne inférieure à une perpendiculaire à (AB) si $\widehat{A} < \widehat{B}$, la bissectrice de \widehat{C}

sinon. En définitive, la meilleure pliure ne peut être qu'une bissectrice ou une perpendiculaire optimale.

Reste à voir laquelle de ces trois droites, pour un triangle donné, est la meilleure pliure (Δ_0), puis, pour n'importe quel triangle, par quoi est minoré la pliabilité :

$2 - \frac{2S(\Delta_0)}{S}$ et si ce minorant est atteint. Je dis « ces trois droites » car il est clair que, parmi toutes les permutations possibles des trois points A, B, C, seules deux bissectrices (Δ_A) et (Δ_B) et une perpendiculaire optimale (Δ_1) sont à prendre en compte. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, pour avoir une perpendiculaire optimale (Δ) de rendement :

$$2 - \frac{2S(\Delta)}{S} = \frac{2b^2}{2b^2 + c^2 - a^2},$$

il faut que $\widehat{C} > \widehat{A}$, sinon les droites de direction (Δ) traverseraient le point B avant que A'' ait atteint C. D'ailleurs, si $c < a$, le rendement ci-dessus serait supérieur à 1, ce qui est absurde. Mais il faut aussi que : $b > a$, sans quoi on n'aurait pas :

$\frac{2b^2}{2b^2 + c^2 - a^2} < \frac{2a}{a+c}$ – qui implique $b^2 > a(a+c) > ab$ – et la bissectrice issue de B serait meilleure que cette perpendiculaire optimale. a est donc le plus petit des trois

côtés, et b le plus grand, sinon le rendement $\frac{2b^2}{2b^2 + c^2 - a^2}$ du meilleur pliage

perpendiculairement à (AC) serait moins bon que le rendement $\frac{2c^2}{2c^2 + b^2 - a^2}$ du

meilleur pliage perpendiculairement à (AB). Par ailleurs, lorsque $b > c > a$, la bissectrice (Δ_C) de l'angle C ne peut pas être la meilleure bissectrice. En définitive,

si l'on suppose $b > c > a$, la pliabilité $2 - \frac{2S(\Delta_0)}{S}$ du triangle ne peut être que l'une

des trois valeurs : $\frac{2c}{b+c}$, $\frac{2a}{c+a}$ ou $\frac{2b^2}{2b^2 + c^2 - a^2} = \frac{2b}{2c \cos \widehat{A} + b}$. Comme la

fonction $\frac{2}{x+1}$ est décroissante, il suffit, pour les départager, de comparer : $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$

et $\frac{2c \cos \widehat{A}}{b}$.

Si l'on positionne A en (0, 0) et C en (1, 0), en donnant à B des coordonnées (x, y) avec $y > 0$, on a : $b = 1$, donc la condition $b > c > a$ équivaut à : $x > \frac{1}{2}$ et

$x^2 + y^2 < 1$. La condition : $\frac{b}{a} < \frac{c}{a}$ est vérifiée à droite de la courbe :

$$y^2 = \frac{1}{2} - x^2 \pm \sqrt{\frac{5}{4} - 2x},$$

qui admet deux tangentes verticales, en

$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right)$ et en $\left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{7}}{6}\right)$. On voit se

profiler le nombre d'or et la suite de Fibonacci : $\frac{5}{8}$ est une bonne approxima-

tion de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Le nombre d'or réapparaît lorsqu'on étudie : $\frac{c}{a} < \frac{2c \cos \widehat{A}}{b}$, qui est

vérifié au dessus de la courbe : $y^2 = x^2 \frac{3-2x}{2x+1}$ (trisectrice de Mac-Laurin). Nous

avons vu que B appartient à cette courbe lorsque l'angle \widehat{B} est le double de l'angle \widehat{A} ($b = 2a \cos \widehat{A}$) : la courbe coupe donc l'axe $x = \frac{1}{2}$ (soit $a = c$) en $y = \frac{1}{2}$

($\widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{2}$), et le cercle $x^2 + y^2 = 1$ (soit $b = c$), en

$x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ($\widehat{A} = \frac{\pi}{5}$, $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{2\pi}{5}$). Enfin, la troisième condition :

$\frac{b}{c} < \frac{2c \cos \widehat{A}}{b}$ est vérifiée à droite de la courbe : $y^2 = \frac{1}{4x^2} - x^2$, qui admet une

tangente verticale en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Ces trois courbes ont un point commun : il existe un triangle non équilatéral pour

lequel $\frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{2c \cos \widehat{A}}{b} = r$, où $r = 1,220\ 744\ 084\ 605\ 759\ 475\ 361\ 685\ 349\ 108 \dots$

est la racine positive de : $x^4 - x - 1 = 0$. En effet, si l'on pose $c = ax$, la double égalité ci-dessus équivaut à : $b = ax^2$ et $2 \cos \widehat{A} = x^2$, donc d'après Al Kashi,

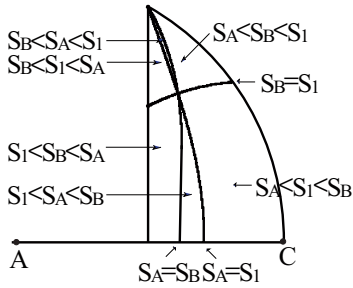
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} = a^2 (x^4 + x^2 - x^5),$$

soit

$$(x-1)(x^4 - x - 1) = 0.$$

L'équation est résoluble par radicaux

$$r = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{1}{2u} - \frac{u^2}{4}}$$

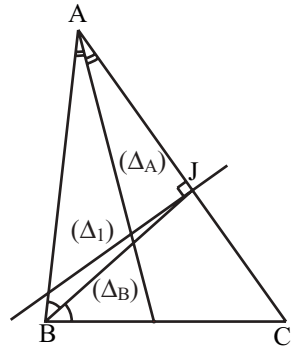


avec:

$$u^2 = 3\sqrt{\frac{\sqrt{849} + 9}{18}} - 3\sqrt{\frac{\sqrt{849} - 9}{18}}$$

et le point B a pour coordonnées : $\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3-r}}{2r}\right)$. Ce

triangle pathologique est intéressant, car son meilleur pliage s'obtient selon trois droites totalement différentes, qui ne sont même pas concourantes, preuve qu'on ne peut pas résoudre ce problème de pliage avec un argument simple – en vertu du principe qu'un résultat simple peut s'obtenir par une démonstration compliquée, mais qu'un résultat compliqué ne peut pas s'obtenir par une démonstration simple. Si l'on



Triangle admettant trois pliures optimales (Δ_A) , (Δ_B) et (Δ_1) .

définit le rendement du pliage $2 - \frac{2S(\Delta)}{S}$ comme fonction du point T par exemple – en permettant à T de s'éloigner indéfiniment de A, (Δ) pouvant couper $]BC[$, sur chaque demi-droite issue de A, ce rendement décrira trois axes de parabole bien raccordés, alternativement convexes et concave. Mais la surface globale aura des bosses et des singularités, sans parler du cas où T tend vers A (René Manzoni a réalisé un premier dessin de cette surface par ordinateur, entre autres dans le cas : $a = 41$, $b = 61$, $c = 50$). Parmi les différents extrema locaux, plusieurs sont susceptibles d'être l'extremum global, à tel point que cet extremum global est atteint trois fois pour un même triangle pathologique. Je ne vois donc pas comment on pourrait, dans le cas général, départager ces extrema sans les calculer explicitement.

Toujours est-il que la position de B par rapport aux trois courbes de la page 116 permet de comparer les trois aires $S_A = S(\Delta_A)$, $S_B = S(\Delta_B)$ et $S_1 = S(\Delta_1)$, et en particulier de dire laquelle des trois droites (Δ_A) , (Δ_B) et (Δ_1) est la meilleure pliure (Δ_0) : dans les deux domaines de droite, c'est la bissectrice de \widehat{A} , (Δ_A) ; dans les deux domaines du haut à gauche, c'est la bissectrice de \widehat{B} , (Δ_B) ; et dans les deux domaines du bas à gauche, c'est la perpendiculaire optimale (Δ_1) . Quand la meilleure

pliure (Δ_0) est (Δ_1) , $\frac{2c \cos \widehat{A}}{b} = 2x$ est majoré par $\sqrt{2}$. De même, quand $(\Delta_0) = (\Delta_A)$,

on a notamment : $\frac{b}{c} < \frac{2c \cos \widehat{A}}{b}$, soit : $\frac{b^2}{c^2} < 2 \cos \widehat{A}$, donc $\frac{b}{c} < \sqrt{2}$. Et (Δ_0) n'est

la bissectrice (Δ_B) que si $\frac{c}{a} < \frac{2c \cos \widehat{A}}{b}$ et $\frac{c}{a} < \frac{b}{c}$, ce qui entraîne, en multipliant

membre à membre : $\left(\frac{c}{a}\right)^2 < 2 \cos \widehat{A}$, donc en définitive $\frac{c}{a} < \sqrt{2}$. Comme $S_B < S_1$

nécessite $\widehat{A} > \frac{\pi}{5}$, on peut même améliorer largement cette dernière majoration.

En fin de compte, la plus petite pliabilité $2 - \frac{2S(\Delta_0)}{S}$ d'un triangle vaut $2(\sqrt{2} - 1)$, correspondant à $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, donc à un triangle dégénéré. Le fait que l'extremum d'un tel indice de dissymétrie soit atteint pour un triangle dégénéré me semble assez prévisible, mais je ne voudrais pas généraliser hâtivement.