Réponses de Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), François Couloigner (Tarbes) et Michel Lafond (Dijon).

On note q le demi périmètre du triangle : $p = 2q$. Si a désigne la longueur d'un des côtés du triangle, il faut montrer que

$$a \leq \frac{q}{3}\left(1+2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}\right)\right)\right) \tag{1}$$

D'après la formule de Héron,

$$\mathrm{A}=\sqrt{q(q-a)(q-b)(q-c)}.$$

Et d'après l'inégalité arithmético-géométrique, pour des réels $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n.$$

On en déduit

$$\mathrm{A}=\sqrt{q}\sqrt{(q-a)(q-b)(q-c)} \leq \sqrt{q}\sqrt{\left(\frac{q-a+q-b+q-c}{3}\right)^3},$$

et comme $q - a + q - b + q - c = 3q - p = q$,

$$\mathrm{A} \leq \sqrt{\frac{q^4}{27}},$$

ce que Jean-Claude Carréga appelle « l'inégalité isopérimétrique pour le triangle ». Ainsi,

$$0 \leq \frac{54\mathrm{A}^2}{q^4} \leq 2,,$$

donc

$$-1 \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4} \leq 1,$$

et l'inégalité à démontrer a un sens (puisque arccos est définie sur [–1, 1]) et est équivalente à

$$\frac{3a-q}{2q} \leq \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}\right)\right) \tag{2}$$

On remarque que

$$0 \leq a \leq q,$$

donc

$$-q \leq 3a - q \leq 2q$$

puis

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{3a-q}{2q} \leq 1.$$

Les calculs ci-dessous utilisent la décroissance des fonctions cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ et arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ et le fait qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. Successivement, la relation (2) devient

$$\arccos\left(1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}\right) \leq 3\arccos\left(\frac{3a-q}{2q}\right),$$

puis, en posant

$$\theta = \arccos\left(\frac{3a-q}{2q}\right),$$

$$\cos(3\theta) \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4},$$

soit

$$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta) \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}.$$

La valeur de $\cos(\theta)$ étant $\dfrac{3a-q}{2q}$, la relation précédente équivaut à

$$\frac{(3a-q)^3}{2q^3}-3\frac{3a-q}{2q} \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}.$$

soit

$$(3a-q)^3 q-3(3a-q)q^3 \leq 2q^4-108\mathrm{A}^2.$$

Un calcul sans difficulté transforme cela en

$$4\mathrm{A}^2 \leq a^2 q(q-a).$$

En utilisant de nouveau la formule de Héron, la relation (1) devient

$$4q(q-a)(q-b)(q-c) \leq a^2 q(q-a).$$

Si $a = q$, le résultat est trivial. Sinon, il s'agit de montrer que

$$4(q-b)(q-c) \leq a^2.$$

soit, puisque $2q = p = a + b + c$,

$$(a+c-b)(a+b-c) \leq a^2,$$

soit enfin

$$a^2-(b-c)^2 \leq a^2,$$

ce qui est évident.