Réponses de Bernard Collignon (Coursan), Michel Lafond (Dijon), Francois Couloignier (Tarbes), Paul Pechoux (Valdoie), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Voici par exemple la solution de **Francois Couloignier**. Sans perdre de généralité, on peut supposer que les x_i sont rangés dans l'ordre croissant. Notons $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la somme considérée :

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \min(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}).$$

Pour $n = 2$,

$$S(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \min(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 = x_2 = \max(x_1, x_2).$$

Pour $n = 3$,

$$S(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - x_1 - x_1 - x_2 + x_1 = x_3 = \max(x_1, x_2, x_3).$$

Cela amorce une récurrence, vérifions l'hérédité. Si la somme avec n réels se réduit à leur maximum, alors avec un réel de plus, on découpe la somme en deux, selon que $i_1 = 1$ ou non :

$$\begin{aligned} S(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = & \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\boxed{1 < i_1} < i_2 < \cdots < i_k \le n+1} \min(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\boxed{1 = i_1} < i_2 < \cdots < i_k \le n+1} \min(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = S(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 < i_2 < \cdots < i_k \le n+1} x_1 .$$

Par hypothèse de récurrence, la premiere somme vaut x_{n+1} et l'on peut factoriser la seconde par x_1 :

$$S(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} 1^{n-j} = x_{n+1} + x_1 (1-1)^n = x_{n+1},$$