Réponses de Raymond Heitz (Piriac), Pascale De Jonghe (Clermont-Ferrand) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

On va montrer que u_n converge vers $\dfrac{l}{\mathrm{R}-1}$ quand n tend vers $+\infty$. On commence par se ramener au cas où $l = 0$. Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \dfrac{l}{\mathrm{R}-1}$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}\,v_{n+1} - v_n = \mathrm{R}\,u_{n+1} - u_n - \frac{l}{\mathrm{R}-1}(\mathrm{R}-1) = (\mathrm{R}\,u_{n+1} - u_n) - l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si l'on sait montrer que la suite v tend vers 0, c'est gagné.

Soit donc une suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{R}v_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il faut montrer que v tend vers 0. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_k = \mathrm{R}v_{k+1} - v_k$. La suite δ tend vers 0. Par définition, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}^k\delta_k = \mathrm{R}^{k+1}v_{k+1} - \mathrm{R}^k v_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant la relation précédente pour $k \in [[0, n-1]]$,

$$\mathrm{R}^n v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{R}^k\delta_k.$$

Donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{R}^{k-n}\delta_k + \frac{v_0}{\mathrm{R}^n} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{R}^{-k}\delta_{n-k} + \frac{v_0}{\mathrm{R}^n}$$

Puisque $\mathrm{R} > 1$, le terme $\dfrac{v_0}{\mathrm{R}^n}$ tend clairement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour finir, il s'agit de montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{R}^{-k}\delta_{n-k}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour simplifier les notations, on note $r = \dfrac{1}{\mathrm{R}}$. Le point fondamental est l'encadrement $0 < r < 1$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les suites (δ_n) et (r^n) tendent vers 0, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq p$,

$$|\delta_k| < \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < r^k < \varepsilon.$$

On choisit $n \geq 2p$. On découpe la somme ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{p} r^k \delta_{n-k} + \sum_{k=p+1}^{n} r^k \delta_{n-k}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} r^k |\delta_{n-k}| + \sum_{k=p+1}^{n} r^k |\delta_{n-k}|.$$

Dans la première somme, $k \leq p$ donc $n - k \geq n - p \geq p$ et $|\delta_{n-k}| < \varepsilon$. Dans la seconde somme, $k \geq p$ donc et $|r^k| < \varepsilon$. Enfin, puisque la suite δ tend vers 0, elle est bornée, disons par $\mathrm{M} > 0$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{p} r^k + \mathrm{M} \sum_{k=p+1}^{n} r^k.$$

On calcule les deux sommes géométriques :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \varepsilon \frac{r - r^{p+1}}{1-r} + \mathrm{M} \frac{r^{p+2} - r^{n+1}}{1-r}.$$

Le dénominateur est positif. On majore donc la fraction en majorant le numérateur :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \varepsilon \frac{r}{1-r} + \mathrm{M} \frac{r^{p+2}}{1-r}.$$

Par choix de l'entier p, on a la majoration $r^{p+2} < \varepsilon$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \frac{r + \mathrm{M}}{1-r} \varepsilon.$$

Le terme $\dfrac{r+\mathrm{M}}{1-r}$ est une constante. Vu l'arbitraire sur ε, on a bien montré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.