Réponses de Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), Bernard Collignon (Coursan), François Duc (Orange), Allain Perron (Clelles), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Soit M un point intérieur au parallélogramme et Δ la droite parallèle à (AB) passant par M. Pour M hors de [CA], soit $\overrightarrow{MX}$ du même côté que (AB) de Δ et tel que $\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MX}\right)=\left(\overrightarrow{MX},\overrightarrow{MA}\right)$.

De même, pour M hors de [DB], soit $\overrightarrow{MY}$ du même côté que (CD) de Δ et tel que $\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MY}\right)=\left(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MC}\right)$.

De là, on déduit d'abord que (MX) (resp. (MY)) est sécante avec [AC] (resp. sécante avec [DB]), puis

$$2\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MX}\right)=\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)$$

et

$$2\left(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB}\right)$$

En ajoutant membres à membres :

$$\begin{aligned}2\left(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MX}\right)&=\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB}\right)+2\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)\\&=\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\\&=S\end{aligned}$$

où S est réel défini modulo 2π. D'où :

$$\left(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MX}\right)\equiv\frac{S}{2}\pmod{\pi}.$$

Donc la condition « $\widehat{AMB}$ et $\widehat{DMC}$ sont supplémentaires » est équivalente à la condition « (MX) et (MY) sont perpendiculaires ».
De cela, on déduit le point suivant : si M est hors de (DB) (resp. hors de (AC)), alors (MX) (resp. (MY)) est bissectrice extérieure de $\widehat{DMB}$ (resp. de $\widehat{AMC}$) et (MX) (resp. (MY)) ne rencontre pas [DB] (resp. ne rencontre pas [AC]). Cela étant, distinguons trois cas :

1) Si la droite (MX) est perpendiculaire à la droite (CA), la droite (MX) est la médiatrice du segment [CA] et passe par le centre O $\in$ [DM]. Le point M est sur (DB), les diagonales de ABCD sont perpendiculaires. Donc ABCD est un losange.

2) Si la droite (MY) est perpendiculaire à la droite (DB), on prouve que de même que

le point M appartient au segment [AC], les droites (CA) et (DB) sont perpendiculaires, c'est-à-dire que ABCD est un losange.

3) Il reste à étudier le cas où la droite (MX) n'est ni parallèle ni perpendiculaire à la droite (AC) et la droite (MY) n'est ni perpendiculaire ni parallèle à la droite (DB).

L'hyperbole équilatère de diamètre [AC] ayant une asymptote parallèle à (MX) a aussi une deuxième asymptote parallèle à (MY) et de même l'hyperbole équilatère de diamètre [BD] d'asymptote parallèle à (MY) a aussi une autre asymptote parallèle à (MX). Ces deux hyperboles ont le même centre, les mêmes asymptotes et un point commun M. Elles sont donc identiques et il s'agit de l'hyperbole ayant son centre au centre du parallélogramme et ses asymptotes parallèles aux bissectrices intérieures des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{DAB}$ respectivement.

Réciproquement, dans le cas du losange, les symétries axiales de ce quadrilatère impose au lieu recherché d'être la réunion des deux segments diagonaux.

Sinon, si le point M appartient à l'hyperbole qui a été définie ci-dessus, les bissectrices de $\widehat{AMC}$ et $\widehat{BMD}$ sont deux à deux perpendiculaires et l'on a vu que cela entraîne la condition de supplémentarité de l'énoncé.

Le lieu demandé est donc formé des deux arcs de cette hyperbole situés à l'intérieur du parallélogramme.

Remarque : À partir de l'égalité $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$, démontrée dans le bulletin 491 à propos d'un exercice posé aux olympiades canadiennes, on peut noter que les droites (BM) et (DM) sont en relation homographique et que par conséquent leur point d'intersection décrit une conique dont les directions asymptotiques sont celles des bissectrices de $\widehat{ABC}$.

D'où pour le lieu recherché ci-dessus la réunion des diagonales lorsque ABCD est un losange, une hyperbole équilatère sinon.