Réponses de Maurice Bauval (Versailles), Michel Bataille (Rouen), Georges Kocher (Ravières), Benoît Fourlegnie, Michel Lafond (Dijon), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

L'inégalité proposée se généralise évidemment, essentiellement par des arguments de convexité. Avant d'aborder cela, voyons une démonstration « à la main », par exemple celle proposée par **Michel Bataille** :

En développant l'inégalité à démontrer, il s'agit de prouver que

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 \geq 64abc;$$

soit encore, puisque la somme $a + b + c$ vaut 1

$$2 + ab + ac + bc > 63abc. \tag{1}$$

Pour établir l'inégalité (1), posons $r = \sqrt[3]{abc} \geq 0$. Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(a+b+c),$$

soit

$$3r \leq 1. \tag{2}$$

Toujours par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$r^2 = \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca).$$

Donc

$$2 + ab + ac + bc \geq 2 + 3r^2.$$

Si on prouve que $2 + 3r^2 \geq 63r^3$, on aura prouvé (1). Or on a la factorisation suivante :

$$2+3r^2-63r^3 = (1-3r)\left(21r^2+6r+2\right),$$

et cette expression est bien positive d'après l'inégalité (2).

Pour la généralisation, voici par exemple ce que propose **Georges Lion** : pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x).$$

L'application f est deux fois dérivable et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

puis

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

Ainsi, la fonction f est convexe.
Par l'inégalité de Jensen, pour $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

On suppose que la somme des x_k vaut 1. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

La croissance de l'exponentielle donne

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \geq (n+1)^n .$$

En utilisant la stricte convexité, on peut même en déduire qu'il y a égalité si et seulement si tous les x_k valent $\frac{1}{n}$.
En prenant $n = 3$ et $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)$, un triplet formé de réels strictement positifs de somme 1, on retrouve

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq (3+1)^3 = 64,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Les autres méthodes proposées tournent essentiellement autour de la notion de convexité. **Benoît Fourlegnie** propose, puisque $c = 1 - a - b$, d'étudier l'application de deux variables

$$f : \begin{cases}]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{1-a-b}\right) \end{cases}$$

Cette application est de classe C^∞ et l'étude de sa maximisation se fait classiquement par la recherche de points critiques. Les calculs sont un peu fastidieux mais aboutissent bien au minimum pour $(a,b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, comme souhaité.