Réponse de Georges Lion (Wallis).

On introduit le complexe

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \left\{ f'(t) \middle| \, t \in \left]a, b\right[\right\}.$$

On note $\overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)}$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{D}_f$. Il s'agit de démontrer que m appartient à $\overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)}$.

Soit, pour $t \in [a, b]$, $g(t) = f(t) - f(a) - m(t - a)$. On a ainsi

$$g(a) = g(b) = 0$$

et

$$\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f - m \; ;$$

autrement dit, l'ensemble $\mathcal{D}_g$ est l'image de $\mathcal{D}_f$ par la translation du vecteur d'affixe $(-m)$. On a donc l'équivalence suivante :

$$m \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)} \Leftrightarrow 0 \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_g\right)}.$$

Il est classique que $\overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_g\right)}$ est l'intersection des demi-plans fermés contenant l'ensemble $\mathcal{D}_g$. Soit $\mathcal{P}$ un tel demi-plan. Il existe un complexe λ de module 1 tel que $\lambda\mathcal{P}$ soit limité par une droite parallèle à l'axe imaginaire. On introduit les applications $x = \Re(\lambda g)$ et $y = \Im(\lambda g)$, parties réelle et imaginaire de λg.

Ces applications sont continues sur $[a, \mathrm{b}]$ et dérivables sur $]a, b[$. Par ailleurs, $x(a) = x(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\tau \in]a, b[$ tel que $x'(\tau) = 0$, d'où $\mathrm{i}y'(\tau) \in \mathcal{D}_{\lambda g} \subset \lambda\mathcal{P}$.

Par définition de $\lambda\mathcal{P}$, on en déduit que $0 \in \lambda\mathcal{P}$. Et par rotation de centre O, on a donc $0 \in \mathcal{P}$. Cette relation, vraie pour tout demi-plan fermé contenant $\mathcal{D}_g$, reste vraie pour leur intersection. Ainsi, $0 \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_g\right)}$. On a vu ci-dessus que cette relation est équivalente à $m \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)}$.