$$\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^2+1}{1-\sin x}\,dx}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-(\sin x)^2}{1-\sin x}\,dx}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1-\sin x}\,dx}_{\mathrm{I}_2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-(\sin x)^2}{1-\sin x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1+\sin x)\,dx = [x-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -1+\frac{\pi}{2}.$$

Pour le calcul de I_2 : $1-\sin x = \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2.$

Or $\cos a - \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$, alors

$$\mathrm{I}_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\,dx = \left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 1-0=1.$$

Finalement, en ajoutant les deux résultats, on obtient :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^2+1}{1-\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Jean Gounon considère la fonction F définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ par

$$\mathrm{F}(u) = \int_{u}^{0} \frac{(\cos x)^2+1}{1-\sin x}\,dx.$$

L'intégrale demandée est égale à $\lim\limits_{u\to-\frac{\pi}{2}} \mathrm{F}(u)$ ...

Quarte du pied, escarmouche, coupe, feinte... ?

Hé ! là donc : multiplication par la quantité conjuguée, primitive sans problème, puis limite en $-\frac{\pi}{2}\ldots$

Je quarte du pied, j'escarmouche,
je coupe, je feinte...
Hé ! là donc
À la fin de l'envoi, je touche