

Solutions de Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon), Georges Kocher (Ravières), Raymond Heitz (Lavergne)

L'énoncé suppose $a \neq 0$. Soit $P(x) = ax^2 + (b + 1)x + c$. Les racines de l'équation $P(x) = x$ sont celles du trinôme $ax^2 + bx + c$, disons x_1 et x_2 , dont les somme et produit valent respectivement $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$. L'équation $P(x) = x$ impliquant $P(P(x)) = x$, les racines x_1 et x_2 sont aussi racines de $P(P(x)) = x$, c'est-à-dire racines de

$$E(x) = a(ax^2 + (b+1)x + c)^2 + b(ax^2 + (b+1)x + c) + c - x.$$

Dans $E(x)$, le terme en x^3 est $2a^2(b+1)$ et le terme constant est $ac^2 + bc + c$. Soit x_3 et x_4 les deux autres racines de $E(x)$. Elles vérifient le système suivant :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a^2(b+1),$$

$$x_1x_2x_3x_4 = ac^2 + bc + c.$$

D'où

$$x_3 + x_4 = 2a^2(b+1) + \frac{b}{a} = \frac{2a^3(b+1) + b}{a},$$

$$x_3x_4 = (ac^2 + bc + c) / (c/a) = a(ac + b + 1).$$

Les quatre racines de $E(x)$ sont donc x_1 et x_2 racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, ainsi que x_3 et x_4 , racines du trinôme $x^2 - ((2a^3(b+1) + b)/a)x + a(ac + b + 1)$.