Commentaire de Jean-Philippe Cortier sur le probleme 503-3

J'ai reçu une jolie solution à ce problème. Il s'agissait de montrer que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre premier $p \geq 3$, et un sous groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, l'application

$$\begin{cases} G \to GL_n\left(F_p\right) \\ A \mapsto A \bmod p \end{cases}$$

est injective. L'argument naturel de **Jean-Philippe Cortier** (Troyes) est le suivant.

Soit $A \in G$. D'apres Lagrange, si m est le cardinal de G, alors $A^m = I_n$. La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des racines de l'unité, donc de module 1. Supposons de plus que $A \equiv I_n \bmod p$. Ainsi, $B = \frac{1}{p}\left(A - I_n\right)$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et son spectre est

$$\left\{\frac{\lambda-1}{p} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\left(A\right)\right\}.$$

En particulier, une valeurs propre de B vérifie

$$|\mu| \leq \frac{2}{p} < 1,$$

puisque $p \geq 3$. Donc la suite $(B^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. Étant formée de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, cette suite est stationnaire. Finalement, B est nilpotente et diagonalisable, donc nulle. Ainsi,

$$A = I_n + pB = I_n;$$

ce qu'il fallait démontrer.