Réponses de Moubinool Omarjee (Paris) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Les deux réponses utilisent des résultats sur la répartition des nombres premiers et une transfomation d'Abel.

La solution que propose **Moubinool Omarjee** suppose connu un résultat très fin de théorie analytique des nombres, dû à **Jean-Louis Nicolas**[1]

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n^{5/8}.$$

Pierre Renfer utilise lui un développement asymptotique de p_n :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + \mathcal{O}\left(n\ln\left(\ln(n)\right)\right).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{p_n}-\frac{1}{n\ln(n)}=\frac{n\ln(n)-p_n}{n\ln(n)\,p}\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n\ln^2(n)}\right)$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{1}{p_n}-\frac{1}{n\ln(n)}\right|\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n\ln^{3/2}(n)}\right).$$

En utilisant les séries de Bertrand, on voit que les séries $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{p_n}w$ et $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{n\ln(n)}$ sont de même nature.

On va maintenant montrer que cette seconde série converge, en effectuant une transformation d'Abel. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{S_N}=\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{n\ln(n)}\quad(\mathrm{N}\geq2)$$

et

$$\sigma_{\mathrm{N}}=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}\quad(\mathrm{N}\geq1)$$

Ainsi,

$$\mathrm{S_N}=\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}(\sigma_{\mathrm{n}}-\sigma_{n-1})\frac{1}{n\ln(n)}.$$

On coupe les sommes en deux et l'on fait un décalage d'indices :

$$\mathrm{S_N}=\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{\sigma_{\mathrm{n}}}{n\ln(n)}-\sum_{n=1}^{\mathrm{N-1}}\frac{\sigma_{\mathrm{n}}}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

On isole un terme dans chaque somme et l'on regroupe la partie commune :

$$\mathrm{S_N}=\frac{\sigma_{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}\ln(\mathrm{N})}+\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\sigma_{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)-\frac{\sigma_1}{2\ln(2)}.$$

Donc

$$\mathrm{S_N}=\frac{\sigma_{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}\ln(\mathrm{N})}+\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{\sigma_{\mathrm{n}}\left((n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)\right)}{n(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}-\frac{\sigma_1}{2\ln(2)}.$$

Admettons provisoirement que $\sigma_n\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}(\ln(n))$. Alors le terme général dans la somme ci-dessus est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $(\mathrm{S_N})$ converge, ce qui permet de conclure.

Il reste à prouver la domination $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\ln(n))$. Pour cela, on introduit les notations suivantes. Pour deux réels $x > 1$ et $\varphi > 0$, posons

$$\sigma(\varphi,x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{x}{\varphi} \right\rfloor} (-1)^{\lfloor n\varphi \rfloor} = \frac{1}{4} + \sum_{0<n\varphi\leq x} (-1)^{\lfloor n\varphi \rfloor}.$$

Le théorème de Beatty stipule que pour deux réels α, $\beta > 1$ les ensembles $\left\{\lfloor n\alpha \rfloor \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $\left\{\lfloor n\beta \rfloor \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On choisit par la suite $\alpha = \sqrt{2}$ et

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Pour $x \geq 1$, les entiers $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$ qui appartiennent a]0, x] forment une partitition de tout l'ensemble $[[1, m]]$ où l'entier m vaut $\lfloor x \rfloor$ ou $\lfloor x \rfloor - 1$. Ainsi, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} \geq 1$ et $x \geq 1$,

$$\sigma(\alpha,x) + \sigma(\beta,x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k = \pm\frac{1}{2},$$

selon la parité de m. Donc

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},x\right)\right| \leq \left|\sigma\left(2+\sqrt{2},x\right)\right| + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Par ailleurs, l'encadrement $0 < n\left(2+\sqrt{2}\right) \leq x$ équivaut à $0 < n\sqrt{2} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)x$.:
Donc

$$\sigma\left(2+\sqrt{2},x\right) = \frac{1}{4} + \sum_{0<n\left(2+\sqrt{2}\right)\leq x} (-1)^{\left\lfloor n\left(2+\sqrt{2}\right)\right\rfloor} = \frac{1}{4} + \sum_{0<n\sqrt{2}\leq\left(\sqrt{2}-1\right)x} (-1)^{\left\lfloor n\sqrt{2}\right\rfloor},$$

c'est-à-dire que

$$\sigma\left(2+\sqrt{2},x\right) = \sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)x\right). \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},x\right)\right| \leq \left|\sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)x\right)\right| + \frac{1}{2}.$$

Par itération, on obtient pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},x\right)\right| \leq \left|\sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)^k x\right)\right| + \frac{k}{2}.$$

On choisit

$$k = 1 + \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\rfloor,$$

pour lequel

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^k x < \sqrt{2}$$

et

$$\left|\sigma\left(\sqrt{2},\left(\sqrt{2}-1\right)^k x\right)\right| = \frac{1}{4}$$

En revenant a la somme initiale σ_n,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor} = \sigma\left(\sqrt{2}, n\sqrt{2}\right) - \frac{1}{4},$$

donc

$$\left|\sigma_n\right| \leq \frac{1}{4} + \left|\sigma\left(\sqrt{2}, n\sqrt{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\ln(n)\right),$$

comme souhaité.