Réponses de Maurice Bauval (Versailles) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Les entiers $n = 1$ et $n = 3$ sont des solutions évidentes :

$$3^1 - 2 = 1^2 \text{ et } 3^3 - 2 = 5^2:$$

On va montrer que ce sont les seules. Soit n une solution. Tout d'abord, n est nécessairement impair, car si n était pair, disons $n = 2p$, alors il existerait $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$3^{2p} - 2 = a^2,$$

soit encore

$$\left(3^p + a\right)\left(3^p - a\right) = 2.$$

Comme $3^p + a$ est strictement positif, la seule possibilité serait

$$3^p + a = 2 \text{ et } 3^p - a = 1,$$

donc

$$2 \times 3^p = 3,$$

ce qui est impossible.

On cherche desormais les éventuelles solutions impaires autres que 1 et 3 sous la forme $n = 3 + 2p$ avec $p > 1$. On pose $b = 3^p$. Il existe donc $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$3^n - 2 = a^2,$$

ce que l'on écrit

$$27b^2 - a^2 = 2.$$

C'est une équation de type Pell-Fermat. Il s'agit de trouver parmi les solutions $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ celles donc l'abscisse b est une puissance de 3 (autre que 1).

Les premières solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont

$$(b, a) = (1, 5) ; (51, 265) ; (2651, 13775).$$

Si Ω est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ de l'hyperbole d'équation $27x^2 - y^2 = 2$ à coordonnées dans $\Omega \times \Omega$. Ainsi, $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ est toute l'hyperbole tandis que $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des points à coordonnées entières relatives, etc. On va montrer que les points de $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ sont exactement les points

$$M_0(1, 5) \text{ et } M_n = A^n M_0 \ (n \in \mathbb{N})$$

où A est la matrice inversible

$$A = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 135 & 26 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26x + 5y \\ 135x + 26y \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$27x'^2 - y'^2 = 27\,(26x + 5y)^2 - (135x + 26y)^2 = 27x^2 - y^2:$$

Ainsi,

$$(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \quad \text{si et seulement si} \quad (x', y') \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \tag{3}$$

De plus, comme la matrice A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, si (x, y) est dans $\mathbb{Z}^{2,}$ alors (x', y') est dans $\mathbb{Z}^2$. Et comme $\det(A) = 1$, la matrice A^{-1} est aussi à coefficients dans Z. Donc

$$(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \quad \text{si et seulement si} \quad (x', y') \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \tag{4}$$

Les coefficients de A étant même dans $\mathbb{N}$, si $(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{N})$, alors (x', y') est dans $\mathcal{H}(\mathbb{N})$. Puisque M_0 est dans $\mathcal{H}(\mathbb{N})$, tous les points $M_n = A^n M_0$ sont dans $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, l'application $f : X \mapsto AX$ définit une bijection sur $\mathcal{H}(\mathbb{R})$, et envoie le point M_n sur le point M_{n+1}. Comme elle est continue, elle préserve la connexité. Elle envoie l'arc d'hyperbole $\overset{\frown}{M_n M_{n+1}}$ sur un arc d'hyperbole contenant $\overset{\frown}{M_{n+1} M_{n+2}}$. Or on munit $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ d'une relation d'ordre total de la façon suivante : $M_1(x_1, y_1) \leq M_2(x_2, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq x_2$ (auquel cas $y_1 \leq y_2$). Pour cette relation d'ordre, f est strictement croissante sur $\mathcal{H}(\mathbb{N})$. Donc f envoie exactement l'arc d'hyperbole $\widehat{\mathrm{M}_n\,\mathrm{M}_{n+1}}$ sur $\widehat{\mathrm{M}_{n+1}\,\mathrm{M}_{n+2}}$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{H}(\mathbb{N})$. Puisque la suite des abscisses des points M_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il existe un entier n tel que $\mathrm{M} \in \widehat{\mathrm{M}_{n+1}\,\mathrm{M}_{n+2}}$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{A}^{-n}\,\mathrm{M} \in \widehat{\mathrm{M}_0\,\mathrm{M}_1} \cap \mathcal{H}(\mathbb{N}) = \{\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1\}.$$

Donc le point M est soit le point M_n soit le point M_1, ce qui prouve, comme annoncé, que les points de $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ sont exactement les points

$$\begin{pmatrix} b_0 = 1 \\ a_0 = 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

Or

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{A} - \det(\mathrm{A})\mathrm{I}_2 = 52\mathrm{A} - \mathrm{I}_2,$$

donc

$$\begin{pmatrix} b_{n+2} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \mathrm{A}^2 \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = \left(52\,\mathrm{A} - \mathrm{I}_2\right)\begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = 52\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Finalement, toutes les solutions $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation

$$27b^2 - a^2 = 2$$

sont données par

$$\begin{pmatrix} b_0 = 1 \\ a_0 = 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 = 51 \\ a_1 = 265 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52b_{n+1} - b_n \\ 52a_{n+1} - a_n \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant les puissances de 3 (autre que 1) parmi les b_n. On remarque que

$$b_{n+2} = 52b_{n+1} - b_n \equiv b_n - b_{n-1} \bmod 51$$

et que $51 = 3 \times 17$. Voici les premières valeurs de la suite $(b_n \bmod 51)_{n\in\mathbb{N}}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$b_n \mod 51$	1	0	50	50	0	1	1	0

La suite $(b_n \bmod 51)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique de période 6. Il en est de même des suites $(b_n \bmod 3)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n \bmod 17)_{n\in\mathbb{N}}$. Or voici ces deux suites :

n	0	1	2	3	4	5
$b_n \mod 3$	1	0	2	2	0	1
$b_n \mod 17$	1	0	16	16	0	1

les motifs se répétant ensuite. On en déduit que l'entier b_n est divisible par 3 si et seulement si il est divisible par 17. Donc b_n n'est jamais une puissance de 3. Il s'ensuit qu'il n'existe aucune autre solution au problème initial.