Réponses de Michel Bataille (Rouen), Maurice Bauval (Versailles), Bernard Collignon (Coursan), Moubinool Omarjee (Lycée Henri IV), Martin Pépin (ULM), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

Trois types de réponse ont été proposés : en utilisant des séries de fonctions (et une intégration terme à terme), par les séries entières (et une équation différentielle), et enfin une solution un peu mystérieuse et eulérienne.

La convergence de la série ne pose pas de problème : pour n $\in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}. \tag{4}$$

Ainsi,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

et l'on conclut par la règle de d'Alembert.

On aborde maintenant le calcul de la somme, en commençant avec les séries de fonctions, approche proposée par **Maurice Bauval**, **Bernard Collignon** et **Pierre Renfer**. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit les classiques intégrales de Wallis :

$$\mathrm{W}_\mathrm{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Une intégration par parties donne, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_{\mathrm{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_\mathrm{n}$$

puis, avec $\mathrm{W}_1 = 1$,

$$\mathrm{W}_{\mathrm{2n+1}} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times(2)}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times(1)} = \frac{2^n n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{W}_{\mathrm{2n+1}}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\left(\frac{\sin^2(t)}{2}\right)^n \mathrm{d}\,t.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on pose

$$f_n(t) = \sin(t)\left(\frac{\sin^2(t)}{2}\right)^n.$$

Facilement, chaque application f_n est continue sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\sup_{t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|f_n(t)\right|\leq\frac{1}{2^n},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ de la série de fonctions $\sum f_n$, on peut intégrer terme à terme. On reconnaît une somme géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{1-\frac{\sin^2(t)}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Le calcul de cette intégrale est aisé :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{1-\frac{\sin^2(t)}{2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(t)}{2-\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u=\cos(t)$ donne alors le résultat :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Toujours avec des séries de fonctions, **Michel Bataille** propose une autre méthode, en passant par les intégrales eulériennes. On transforme le terme général de la série ainsi :

$$\frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2^n\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(n+2)},$$

où Γ est la fonction d'Euler. On utilise alors la fonction Béta, définie pour x, $y>0$ par

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

et son expression sous forme intégrale :

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}=2^n\mathrm{B}(n+1,n+1)=\int_0^1\big(2t(1-t)\big)^n\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(2t(1-t)\right)^n \, \mathrm{d}t.$$

Sur [0, 1],

$$0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4},$$

ce qui permet d'établir la convergence normale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \int_0^1 \frac{1}{1-2t(1-t)} \, \mathrm{d}t.$$

que l'on transforme en

$$\int_0^1 \frac{2}{1+(2t-1)^2} \, \mathrm{d}t = \left[\arctan(2t-1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

ce qui conclut.

Les séries entières permettent également le calcul de la somme, comme le font **Michel Bataille** (encore lui) et **Martin Pépin**, dont voici le raisonnement. Toujours avec

$$a_n = \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}},$$

on introduit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Le rayon de cette série entière vaut 2 par la régle de d'Alembert (voir le calcul (4)) ou en reconnaissant un équivalent classique :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

dû à Wallis, ce qui fournit

$$a_n \sim \frac{1}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

On observe que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} a_n.$$

En arrangeant l'égalité et en multipliant par x^{n+1}, on obtient

$$2x(n+1)a_{n+1}x^n + a_{n+1}x^{n+1} = x^2 n a_n x^{n-1} + x a_n x^n.$$

Puis on somme pour n allant de 0 à l'infini, ce qui donne

$$2x\,f'(x)+f(x)-1=x^2 f'(x)+x\,f(x)$$

ou

$$\left(2x-x^2\right)f'(x)+(1-x)\,f(x)=1.$$

Les solutions de l'équation homogène associée à cette équation différentielle sont de la forme

$$\lambda\exp\left(-\int\frac{1-x}{x(2-x)}\right)=\frac{\lambda}{\sqrt{\left|2x-x^2\right|}}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$$

Si $x\in\,]0;2[$, par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme

$$x\mapsto\frac{\lambda(x)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

avec

$$\lambda'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(\arccos(1-x)\big).$$

Si $x\in\,]-2\,;0[$, on cherche alors λ telle que

$$\lambda'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(\operatorname{argch}(1-x)\big).$$

On a donc

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda+\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si}\,x\in\,]0;2[\\[2ex] \dfrac{\mu+\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si}\,x\in\,]-2;0[\end{cases}$$

Il faut nécessairement que le numérateur tende vers 0 quand x tend vers 0 dans les deux expressions, ce qui impose

$$\lambda=\mu=0$$

Ainsi,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}x^n=\begin{cases}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si}\,x\in\,]0;2[\\[2ex] \dfrac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si}\,x\in\,]-2;0[\end{cases}$$

On trouve enfin la somme demandée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}=f(1)=\arccos(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Michel Bataille préfère choisir la série entière impaire

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}x^{2n+1}$$

dont le rayon de convergence est $\sqrt{2}$. Les idées sont essentiellement les mêmes que celles de **Martin Pépin**, je passe donc rapidement sur les calculs. On établit d'abord l'équation différentielle

$$\left(x^2-2\right)g'(x)+x\,g(x)=-2$$

puis la relation

$$g(x)=2\frac{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

et l'on trouve enfin la somme cherchée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}=g(1)=2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.:$$

Une dernière solution est proposée par **Moubinool Omarjee** avec l'argument suivant : d'après Euler,

$$\arctan(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2^n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{z^{2n+1}}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}.$$

Si on admet cette formule, il suffit de tester en $z=1$,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

ce qui permet de conclure.