Solutions de Michel Bataille (Rouen), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jean-Claude Carréga (Lyon), Raymond Heitz (Névez), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

On commence par chercher le lieu des points P vérifiant la condition

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{PB}}{\sin\beta}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\sin\gamma}}.$$

En multipliant par $\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}$, elle s'écrit encore

$$4\mathrm{PA}^2\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)=\mathrm{PB}^2\cdot\mathrm{PC}^2\cdot\sin(\alpha). \qquad (1)$$

On introduit les quantités

$$u=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\sin(\alpha)=2\mathcal{A}(\mathrm{PBC}),$$

où le symbole $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle considéré,

$$v=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}\cdot\sin(\beta)=2\mathcal{A}(\mathrm{PCA}),$$

et

$$w=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\sin(\gamma)=2\mathcal{A}(\mathrm{PAB}).$$

Le point P a pour coordonnés barycentriques le triplet (u, v, w) dans le repère affine (A, B, C). La condition (1) s'écrit

$$4vw = u^2.$$

C'est l'équation de l'intersection d'une conique Γ et de l'intérieur du triangle ABC. Pour trouver la nature de Γ, on cherche ses points sur la droite à l'infini, d'équation

$$u + v + w = 0:$$

On obtient

$$4vw = (v + w)^2,$$

c'est-à-dire

$$(v - w)^2 = 0.$$

La conique Γ n'a qu'un point à l'infini. Il s'agit donc d'une parabole. La parabole Γ est tangente en B à la droite (AB) et tangente en C à la droite (AC).

On cherche maintenant le minimum souhaité. Le problème revient à trouver le point de Γ le plus proche de A. Soit a, b, c les longueurs des côtés BC, AC et BA. On peut choisir l'unité de longueur telle que

$$bc = 2\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = 1.$$

Les coordonnées barycentriques (u, v, w) de P, définies plus haut, ont alors pour somme 1. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = v\overrightarrow{\mathrm{AB}} + w\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

et

$$\mathrm{AP}^2 = c^2v^2 + b^2w^2.$$

La condition (1) s'écrit

$$(v - w)^2 - 2(v + w) + 1 = 0.$$

On fait le changement de variables

$$\begin{cases} \mathrm{S} = v + w \\ \mathrm{D} = v - w \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{cases} 2v = \mathrm{S} + \mathrm{D} \\ 2w = \mathrm{S} - \mathrm{D} \end{cases}.$$

La condition (1) s'écrit

$$2\mathrm{S} = \mathrm{D}^2 + 1:$$

On exprime $16\mathrm{AP}^2$ à l'aide de la seule variable D :

$$16\mathrm{AP}^2 = c^2(2\mathrm{S} + 2\mathrm{D})^2 + b^2(2\mathrm{S} - 2\mathrm{D})^2 = c^2(\mathrm{D} + 1)^4 + b^2(\mathrm{D} - 1)^4 = f(\mathrm{D}).$$

La dérivée de f est donnée par

$$f'(\mathrm{D}) = 4c^2(\mathrm{D} + 1)^3 + 4b^2(\mathrm{D} - 1)^3.$$

Cette dérivée est nulle si

$$c^{2/3}(\mathrm{D} + 1) = b^{2/3}(1 - \mathrm{D}).$$

autrement dit

$$\mathrm{D} = \frac{b^{2/3} - c^{2/3}}{b^{2/3} + c^{2/3}}.$$

On a alors

$$\begin{cases} 1+\mathrm{D} = \dfrac{2b^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}} \\ 1-\mathrm{D} = \dfrac{2c^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}} \end{cases}.$$

et, sachant que $bc = 1$, on trouve

$$\mathrm{AP}^2 = \frac{b^{2/3}+c^{2/3}}{\left(b^{3/2}+c^{3/2}\right)^4} = \frac{1}{\left(b^{2/3}+c^{2/3}\right)^3}.$$

La valeur minimale cherchée est donc

$$\mathrm{AP} = \frac{1}{\left(b^{2/3}+c^{2/3}\right)^{3/2}}.$$