Solution de Michel Lafond (Dijon) et Raymond Heitz (Névez).

Il y a treize couples générateurs :

$$(2, q) \text{ avec } 2 \leq q \leq 11 \text{ et } (3, q) \text{ avec } 3 \leq q \leq 5.$$

• Il est clair que les couples (p, q) avec $p > 3$ ne sont pas générateurs. En effet, pour $q \geq p \geq 4$, aucune des suites $\left(\left\lfloor n\sqrt{p}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left\lfloor n\sqrt{q}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend la valeur 1. On restreint donc l'étude aux couples $(2, q)$ avec $q \geq 2$ et $(3, q)$ avec $q \geq 3$.

• Démontrons que les couples $(2, q)$ avec $q \geq 13$ ne sont pas générateurs. Les premiers termes de la suite $\left(\left\lfloor n\sqrt{2}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont

$$0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11,$$

Les entiers 3 et 6 sont absents. Si $q \geq 13$, on a alors $\left\lfloor \sqrt{q}\right\rfloor \geq 3$ et $\left\lfloor \sqrt{2q}\right\rfloor \geq 7$. L'un des deux nombres 3 ou 6 sera toujours absent.

• Démontrons que les couples $(3, q)$ avec $q \geq 7$ ne sont pas générateurs. Les premiers termes de la suite $\left(\left\lfloor n\sqrt{3}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont

$$0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12,$$

Les entiers 2 et 4 sont absents. Si $q \geq 7$, on a alors $\lfloor\sqrt{q}\rfloor \geq 2$ et $\lfloor\sqrt{2q}\rfloor \geq 5$. L'un des deux nombres 2 ou 4 sera toujours absent.

• Il reste 13 couples possibles :

$$(2, q) \text{ avec } 2 \leq q \leq 12 \text{ et } (3, q) \text{ avec } 3 \leq q \leq 6:$$

Le tableau ci-dessous montre que 23 n'est pas engendré par le couple (2, 12) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$	0	1	2	4	5	7	8	11	12	14	15	16	18	19	21	22	24	
$\lfloor n\sqrt{3}\rfloor$	0	3	6	13	17	20	24	27	31									

Et 11 n'est pas engendré par (3, 6) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$	0	1	3	5	6	8	10	12	13	15	17	19	20
$\lfloor n\sqrt{3}\rfloor$	0	2	4	7	19	12	14	17	19	22	24	26	29

• Démontrons que les couples(2, q) avec $2 \leq q \leq 8$ sont générateurs. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \lfloor n\sqrt{q}\rfloor.$$

Alors

$$0 < u_{n+1} - u_n < (n+1)\sqrt{q} - \left(n\sqrt{q} - 1\right) \leq \sqrt{q} + 1 \leq \sqrt{8} + 1 < 4.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ peut valoir 1, 2 ou 3. Considérons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Si N est dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est engendré par (2, q). Sinon, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_n < \mathrm{N} < u_{n+1}.$$

Donc

$$1 \leq \mathrm{N} - u_n < 3.$$

Il y a donc deux cas :

$$\mathrm{N} = u_n + 1 = \lfloor n\sqrt{q}\rfloor + \lfloor 1\sqrt{2}\rfloor,$$

ou bien

$$\mathrm{N} = u_n + 2 = \lfloor n\sqrt{q}\rfloor + \lfloor 2\sqrt{2}\rfloor.$$

Dans tous les cas, N est engendré par (2, q).

• Il est clair que le couple (2, 9) est générateur, puisque tout entier peut s'écrire d'une des facons suivantes :

$$3n = \left\lfloor 0\sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{9}n \right\rfloor,$$

$$3n+1 = \left\lfloor 1\sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{9}n \right\rfloor,$$

ou

$$3n+2 = \left\lfloor 2\sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{9}n \right\rfloor.$$

• Montrons que le couple (2, 10) est générateur. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$\mathrm{A} = \left\lfloor \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{10}} \right\rfloor$$

si bien que

$$\mathrm{A}\sqrt{10} < \mathrm{N} < (\mathrm{A}+1)\sqrt{10}, \tag{2}$$

les inégalités étant larges puisque $\sqrt{10}$ est irrationnel. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $4n \leq \mathrm{A}$, posons

$$f(n) = \left\lfloor (\mathrm{A}-4n)\sqrt{10} \right\rfloor + \left\lfloor 9n\sqrt{2} \right\rfloor.$$

D'après (2),

$$f(0) = \left\lfloor \mathrm{A}\sqrt{10} \right\rfloor < \mathrm{N}. \tag{3}$$

Lorsque l'on passe de n à $n + 1$, la quantité $(\mathrm{A}-4n)\sqrt{10}$ diminue de

$$4\sqrt{10} \approx 12{,}6\cdots$$

tandis que $9n\sqrt{2}$ augmente de

$$9\sqrt{2} \approx 12{,}7\cdots$$

donc $\left\lfloor (\mathrm{A}-4n)\sqrt{10} \right\rfloor$ diminue de 12 ou 13 et $\left\lfloor 9n\sqrt{2} \right\rfloor$ augmente de 12 ou 13. Ainsi,

$$f(n+1) - f(n) \text{ varie d'au plus } 1. \tag{4}$$

Par ailleurs,

$$f(44) = \left\lfloor (\mathrm{A}-176)\sqrt{10} - 176\sqrt{10} \right\rfloor + \left\lfloor 396\sqrt{2} \right\rfloor > \mathrm{A}\sqrt{10} + 560 - 176\sqrt{10}.$$

D'après (2), $\mathrm{A}\sqrt{10} \geq \mathrm{N} - \sqrt{10}$ donc

$$f(44) > \mathrm{N} + 560 - 177\sqrt{10} > \mathrm{N}.$$

Ainsi,

$$f(44) > \mathrm{N}. \tag{5}$$

Les résultats (3), (4) et (5) montrent qu'il existe un entier n entre 0 et 44 tel que $f(n) = \mathrm{N}$. On a donc trouvé $a = \mathrm{A} - 4n$ et $b = 9n$ tels que

$$\mathrm{N} = \lfloor a\sqrt{10} \rfloor + \lfloor b\sqrt{2} \rfloor,$$

ce qui permet de conclure si l'on a $n \geq \frac{\mathrm{A}}{4}$, condition garantissant que a est un entier naturel.
Pour $\mathrm{N} \geq 560$, on a, d'après (2),

$$\mathrm{A} > \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{10}} - 1 \geq \frac{560}{\sqrt{10}} - 1 > 176 = 4 \times 44 \geq 4n,$$

ce qu'il fallait.
Pour les entiers $\mathrm{N} < 560$, Michel Lafond vérifie par un petit programme informatique que cela reste vrai. Il suffit de faire deux boucles for pour tester tous les entiers.

• Montrons que le couple (2, 11) est générateur. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} = \left\lfloor \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{2}} \right\rfloor$.
On a donc

$$\mathrm{A}\sqrt{2} < \mathrm{N} < \mathrm{A}\sqrt{2} + \sqrt{2}. \qquad (6)$$

On introduit, pour tout entier naturel $n \leq \frac{\mathrm{A}}{7}$,

$$f(n) = \lfloor (\mathrm{A} - 7n)\sqrt{2} \rfloor + \lfloor 3n\sqrt{11} \rfloor.$$

On montre qu'en passant de n à n + 1, $\lfloor (\mathrm{A} - 7\sqrt{n}) \rfloor$ diminue de 9 ou 10 tandis que $\lfloor 3n\sqrt{11} \rfloor$ augmente de 9 ou 10. De nouveau, $f(n)$ varie d'au plus 1. Un calcul montre que

$$f(0) < \mathrm{N}$$

tandis que

$$f(34) \geq \mathrm{N}.$$

Il existe donc un entier n entre 0 et 34 tel que $f(n) = \mathrm{N}$, ce qui permet de conclure pour le cas où $\mathrm{A} \geq 4n$, ce qui est garanti pour $\mathrm{N} \geq 338$ puisqu'alors

$$\mathrm{A} > \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{388}{\sqrt{2}} - 1 > 238 = 34 \times 7.$$

Un petit script informatique permet de conclure pour les cas où $\mathrm{N} < 238$.

• L'étude du couple (3, 3) est rapide. En posant $u_n = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor$, on a

$$0 < u_{n+1} - u_n < 3.$$

Pour un entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on choisit un entier n tel que

$$u_n \leq \mathrm{N} < u_{n+1}.$$

On a donc deux cas possibles :

$$N = u_n = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor + \lfloor 0\sqrt{3} \rfloor,$$

ou bien

$$N = u_n + 1 = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor + \lfloor 1\sqrt{3} \rfloor.$$

• Le cas du couple (3, 4) est encore plus facile puisque

$$2n = \lfloor 0\sqrt{3} \rfloor + \lfloor n\sqrt{4} \rfloor,$$

et

$$2n + 1 = \lfloor 1\sqrt{3} \rfloor + \lfloor n\sqrt{4} \rfloor.$$

• Enfin, montrons que le couple (3, 5) est générateur. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $A = \left\lfloor \dfrac{N}{\sqrt{5}} \right\rfloor$, si bien que

$$A\sqrt{5} < N < (A+1)\sqrt{5}.$$

On pose alors pour $0 \leq n \leq \dfrac{A}{3}$

$$f(n) = \lfloor (A - 3n)\sqrt{5} \rfloor + \lfloor 4n\sqrt{5} \rfloor.$$

On a alors

$$f(0) = \lfloor A\sqrt{5} \rfloor \leq A\sqrt{5} \leq N,$$

tandis que

$$f(12) \geq N.$$

et $f(n)$ qui varie d'au plus 1 quand n augmente de 1. Ainsi, il existe un entier n compris entre 0 et 12 tel que $f(n) = N$, ce qui conclut lorsque $n \leq \dfrac{A}{3}$. Ceci est vérifié pour $N \geq 83$, puisqu'alors

$$A > \frac{N}{\sqrt{5}} - 1 > 36 - 3 \times 12.$$

De nouveau, on confie les cas restants à un ordinateur.