CORRE Alain
03000 Moulins

Problèmes d'antan du bulletin 476
Exercice 1

Notations :
- $(\mathscr{C})$ désigne un cercle donné de centre O
- A et B sont deux points distincts du cercle $(\mathscr{C})$
- $(\mathscr{C}_1)$ est un cercle tangent à $(\mathscr{C})$ en A. On notera I_1 son centre.
- $(\mathscr{C}_2)$ est un cercle tangent à $(\mathscr{C})$ en B. On notera I_2 son centre.
- (t_1) désigne la tangente en A à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$
- (t_2) désigne la tangente en B à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_2)$

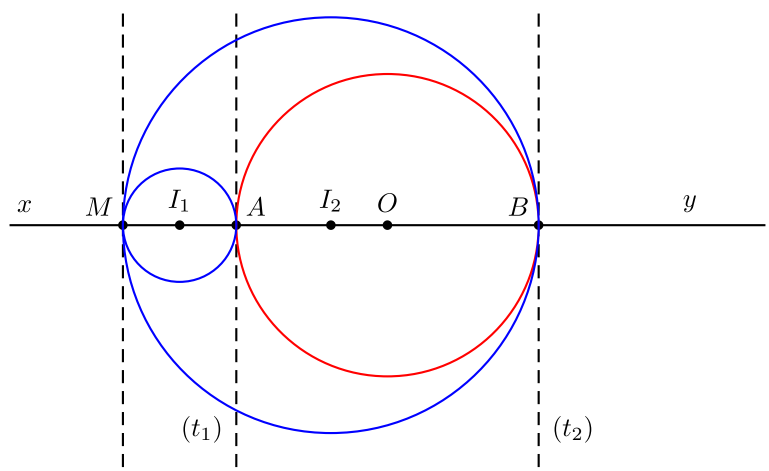
Lieu du point de contact

Étude du cas où (t_1) et (t_2) sont parallèles

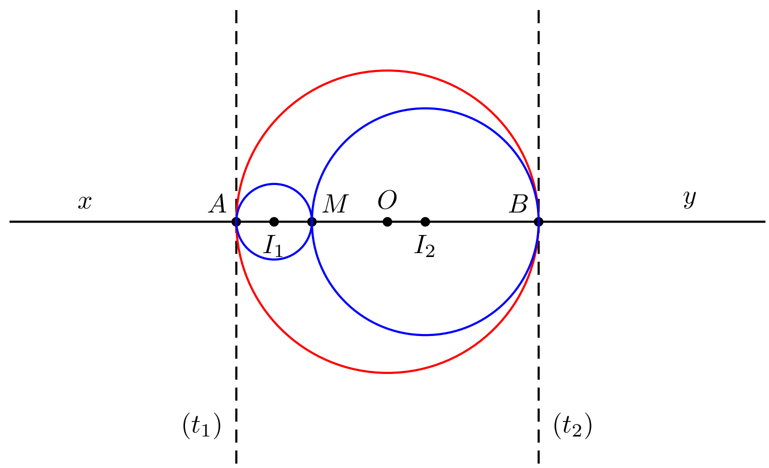
C'est le cas où les points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle $(\mathscr{C})$.
Les points I_1 et I_2 appartiennent à la droite (AB), perpendiculaire aux tangentes en A et B.
Supposons que les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ soient tangents en M. Ce point M appartient à la droite (I_1I_2), donc à la droite (AB).
De plus, si M est distinct de A et de B, I_1 est le milieu du segment $[MA]$, I_2 est le milieu du segment $[MB]$

Soit un point M sur la droite (AB).

1. Le point M appartient à la demi-droite $]Ax)$:
   I_1 est le milieu du segment $[MA]$, I_2 est le milieu du segment $[MB]$, les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents intérieurement.



2. Le point M est confondu avec le point A.
   C'est le cas dégénéré où le cercle $(\mathscr{C}_2)$ est le cercle $(\mathscr{C})$ lui-même. Dans ce cas, le cercle $(\mathscr{C}_1)$ peut être n'importe quel cercle centré sur la droite (AB) et passant par A.
3. Le point M appartient au segment $]AB[$:
   I_1 est le milieu du segment $[MA]$, I_2 est le milieu du segment $[MB]$, les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents extérieurement.



4. Le cas où M est confondu avec B est analogue au cas 2 : $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ sont confondus.
5. Le cas où M appartient à la demi-droite $]By)$ est analogue au cas 1 (par symétrie par rapport à O).

Conclusion

En excluant les cas particuliers où l'un des cercles $(\mathscr{C}_1)$ ou $(\mathscr{C}_2)$ est confondu avec le cercle $(\mathscr{C})$, le lieu des points M est la droite (AB), privée des points A et B :
– Les cercles sont tangents intérieurement lorsque $M \in]Ax) \cup]By)$.
– Les cercles sont tangents extérieurement lorsque $M \in]AB[$.

Étude du cas où (t_1) et (t_2) se coupent en C

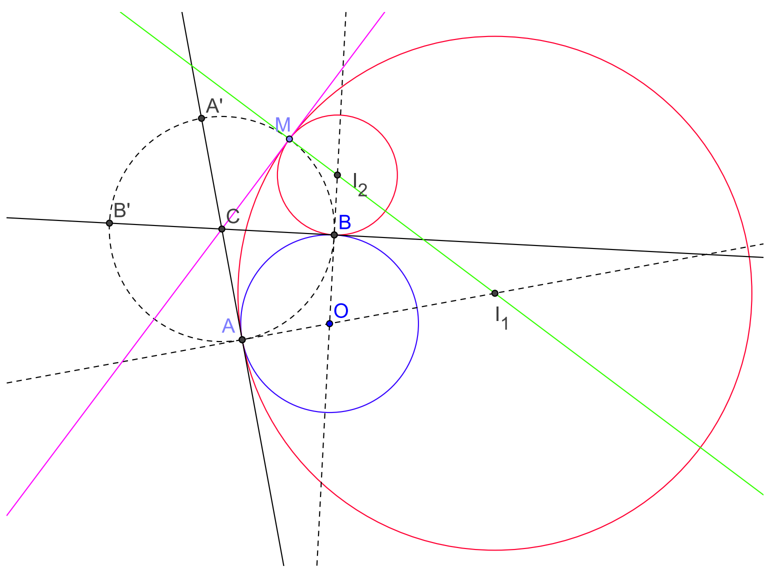
Supposons que les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ soient tangents en M.
Notons $\mathscr{P}_{C/\mathscr{C}}$ la puissance du point C par rapport au cercle $(\mathscr{C})$.

$$\mathscr{P}_{C/\mathscr{C}} = CA^2 = CB^2 = \mathscr{P}_{C/\mathscr{C}_1} = \mathscr{P}_{C/\mathscr{C}_2}$$

C appartient donc à l'axe radical des cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$, donc appartient à leur tangente commune en M.
(C est le centre radical des trois cercles)
On a donc :

$$CA = CB = CM$$

Par conséquent le point M appartient au cercle de centre C et de rayon CA. Notons (Γ) ce cercle.
I_1 et I_2 appartiennent à la perpendiculaire à la droite (CM), qui est la tangente commune aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

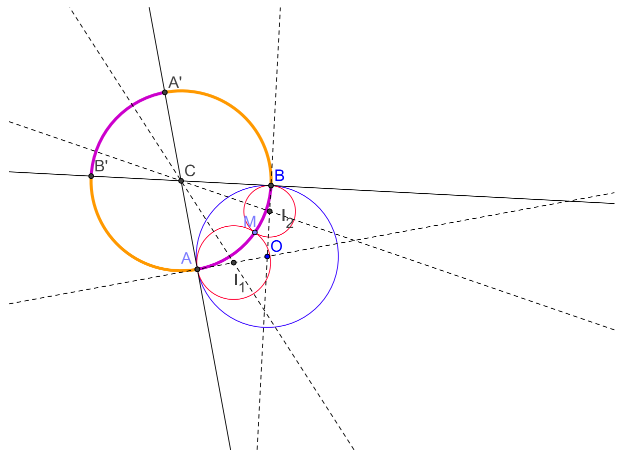


Construction des cercles connaissant M

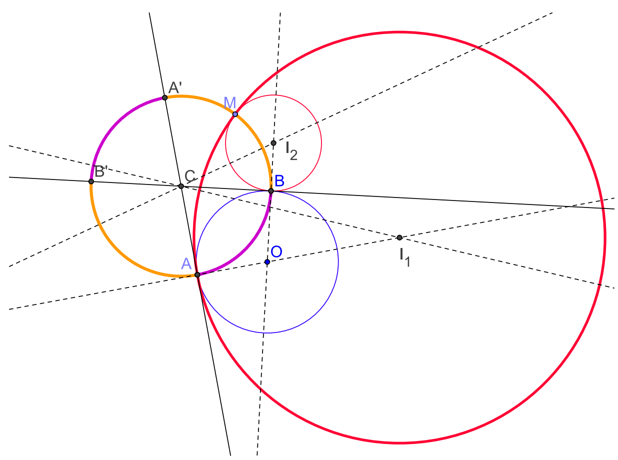
– On choisit un point M sur le cercle de centre C et de rayon CA.
– I_1 est le point d'intersection de la perpendiculaire en M à (CM) et de la droite (OA).
– I_2 est le point d'intersection de la perpendiculaire en M à (CM) et de la droite (OB).
Les intersections existent si et seulement si M n'appartient pas à (CA) (pour I_1) et n'appartient pas à (CB) (pour I_2).
On appellera A' et B' les points du cercle de centre C et de rayon CA diamétralement opposés à A et B respectivement.

Nature de la tangence suivant la position de M

Partageons le cercle de centre C et de rayon CA en quatre arcs :
– L'arc $\overset{\frown}{AB}$, qui se trouve à l'intérieur du cercle $(\mathscr{C})$.
– Puis en suivant le sens trigonométrique, l'arc $\overset{\frown}{BA'}$.
– ensuite $\overset{\frown}{A'B'}$,
– et enfin $\overset{\frown}{B'A}$,



Lorsque M appartient à l'arc $\widehat{AB}$, le point I_1 appartient au segment $[OA]$ et I_2 au segment $[OB]$. Ils sont donc situés de part et d'autre de leur tangente commune (CM), les deux cercles sont donc tangents extérieurement.



Lorsque M appartient à l'arc $\widehat{BA'}$, les points I_1 et I_2 sont situés du même côté de leur tangente commune (CM), les deux cercles sont donc tangents intérieurement.

Il suffit de raisonner de manière analogue pour les deux derniers arcs. Conclusion :
- si M appartient à l'arc $\widehat{AB}$, les deux cercles sont tangents extérieurement.
- si M appartient à l'arc $\widehat{BA'}$, les deux cercles sont tangents intérieurement.
- si M appartient à l'arc $\widehat{A'B'}$, les deux cercles sont tangents extérieurement.
- si M appartient à l'arc $\widehat{B'A}$, les deux cercles sont tangents intérieurement.

Lieu des centres d'homothétie

Rappels :

- Si deux cercles tangents en un point M ont même rayon, il existe une unique homothétie qui les transforme, celle de centre M et de rapport -1 (c'est à dire la symétrie de centre M).
- Soit deux cercles (Ω) de centre ω et de rayon R et (Ω') de centre ω' et de rayon R' tels que $R \neq R'$. Il existe deux homothéties qui transforment (Ω) en (Ω') :
  - Une homothétie h de rapport $\dfrac{R'}{R}$ qui transforme ω en ω'.
  - Une homothétie h' de rapport $-\dfrac{R'}{R}$ qui transforme ω en ω'.
  - Lorsque les deux cercles sont tangents, le point de tangence est l'un des centres d'homothétie, l'autre centre d'homothétie coïncide alors avec le centre de l'inversion qui transforme (Ω) en (Ω')

Étude du cas où (t_1) et (t_2) sont parallèles

En reprenant les notations précédentes, si M appartient à $]Ax) \cup]By)$, les cercles sont tangents intérieurement, et les rayons sont nécessairement distincts. Il existe alors deux homothéties transformant $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_2)$: l'une de rapport positif ayant pour centre le point M, l'autre, de rapport négatif de centre N.
Si M appartient au segment $]AB[$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents extérieurement, M est le centre de l'homothétie de rapport négatif et le centre N de l'homothétie positive est extérieur au segment $[AB]$.

Étude des homothéties de centre N

Dans les deux cas, N est extérieur au cercle $(\mathscr{C})$, on peut donc tracer une tangente à ce cercle.
Appelons T le point de tangence.
Le point M n'étant pas invariant dans cette homothétie qui transforme $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_2)$, l'image du point A est M et l'image de M est B. D'où :

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NM}}$$

ce qui entraîne :

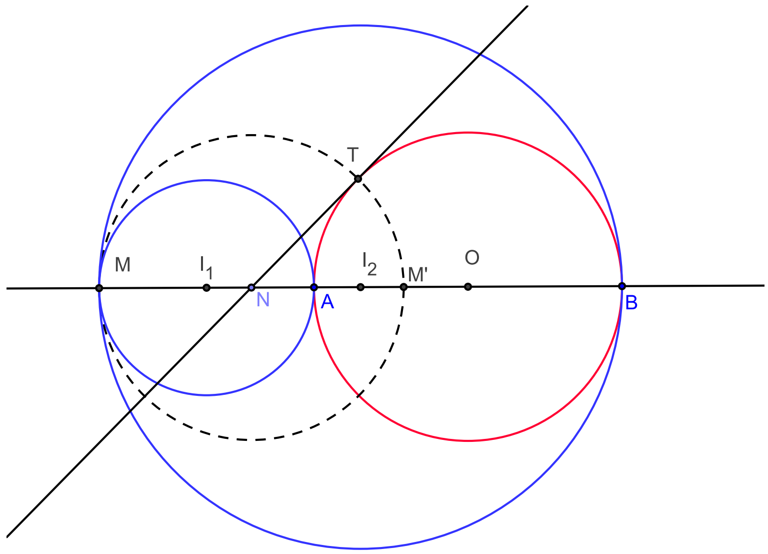
$$NM^2 = \overline{NA} \times \overline{NB} = \mathscr{P}_{C/\mathscr{C}}$$

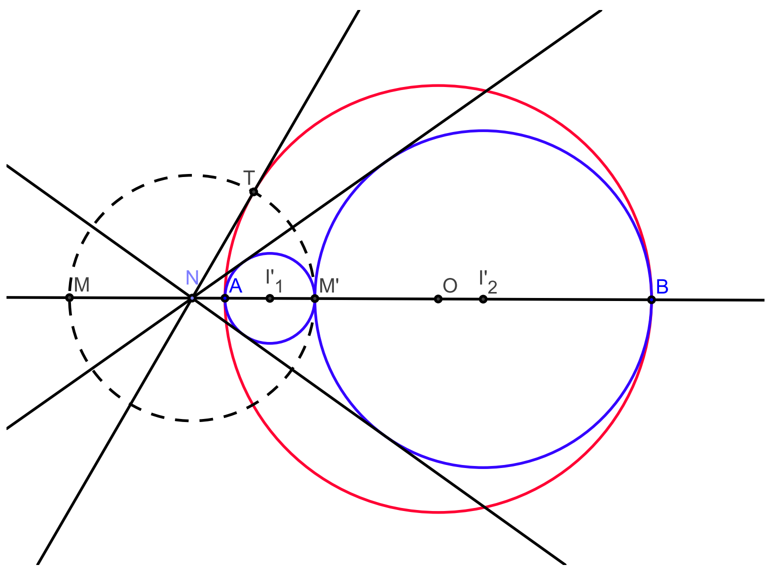
On a donc :

$$NM^2 = NT^2 \qquad \text{donc} \qquad NM = NT$$

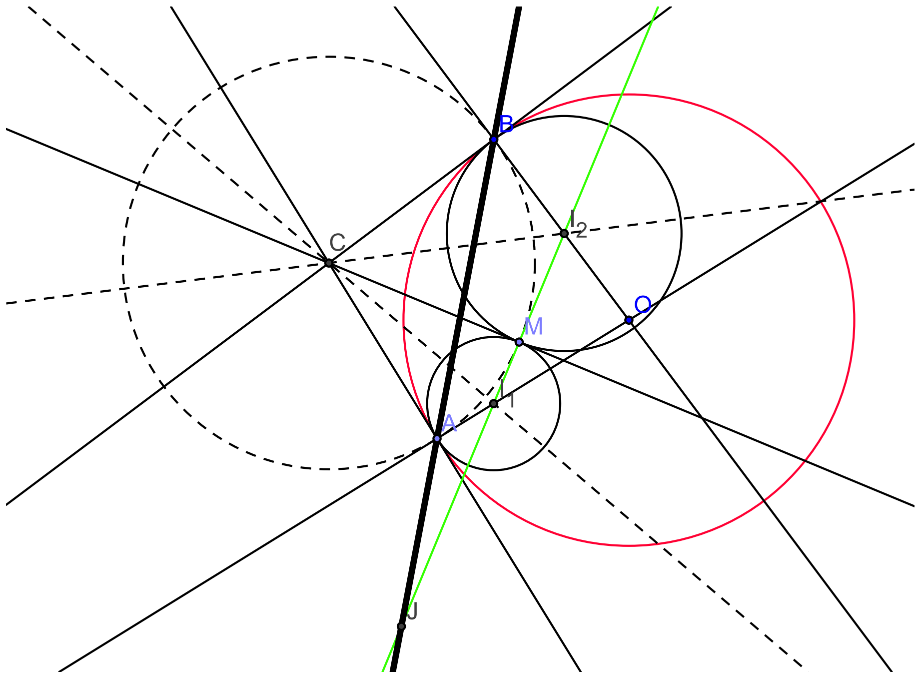
Le cercle de centre N et de rayon NT coupe la droite (AB) en deux points M et M', le point M étant le point extérieur au cercle $(\mathscr{C})$.
On peut alors construire :

- Deux cercles tangents intérieurement en M, I_1 étant le milieu de $[AM]$, I_2 celui de $[BM]$.
- Deux cercles tangents extérieurement en M', I'_1 étant le milieu de $[AM']$, I'_2 celui de $[BM']$.


T
M
I1
I2
M'
O
N
A
B


T
M
N
A
I'1
M'
O
I'2
B

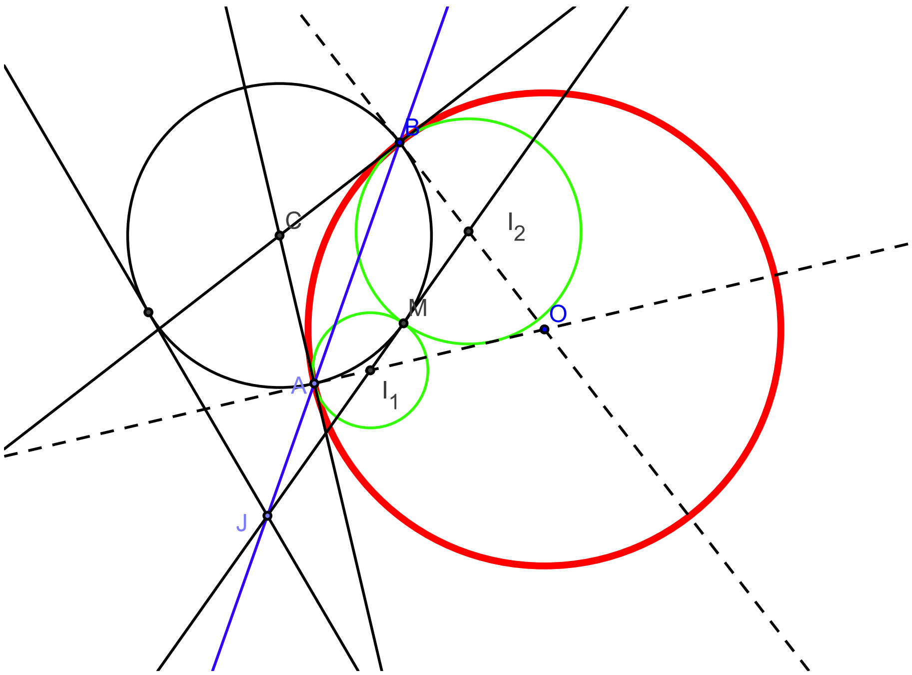
Étude du cas où (t_1) et (t_2) se coupent en C



Considérons l'homothétie de centre J ($J \neq M$) qui transforme le cercle $(\mathscr{C}_1)$ en le cercle $(\mathscr{C}_2)$. J est aussi le centre de l'inversion $\mathscr{I}$ qui transforme le cercle $(\mathscr{C}_1)$ en le cercle $(\mathscr{C}_2)$.
Le point M est invariant par cette inversion, le rapport d'inversion est donc égal à JM^2. Comme J appartient à la droite (I_1I_2), ce rapport est égal à la puissance du point J par rapport au cercle (Γ) de centre C et de rayon CM.
Soit D l'image de A par cette inversion. On a $\overline{JA} \times \overline{JD} = JM^2$, et comme A appartient au cercle (Γ), D y appartient également puisque $\overline{JA} \times \overline{JD}$ représente la puissance de J par rapport à ce cercle. De plus D appartient à $(\mathscr{C}_2)$, et est distinct de M, donc $D = B$.
Conséquence : J appartient à la droite (AB), tout en étant extérieur au cercle (Γ).

CORRE Alain
03000 Moulins

Construction des cercles connaissant le point J sur la demi-droite (AB) privée du segment $[AB]$



- On choisit un point J sur la droite (AB) extérieur au cercle (Γ).
- On trace les tangentes au cercle de centre C et de rayon CM issues de J.
- Soit M l'un des points de tangence
- I_1 est à l'intersection des droites (JM) et (OA).
- I_2 est à l'intersection des droites (JM) et (OB).

Conclusion

Que les points A et B soient diamétralement opposés ou non, le lieu des centres des homothéties qui transforment $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_2)$ en étant différent du point de tangence est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.