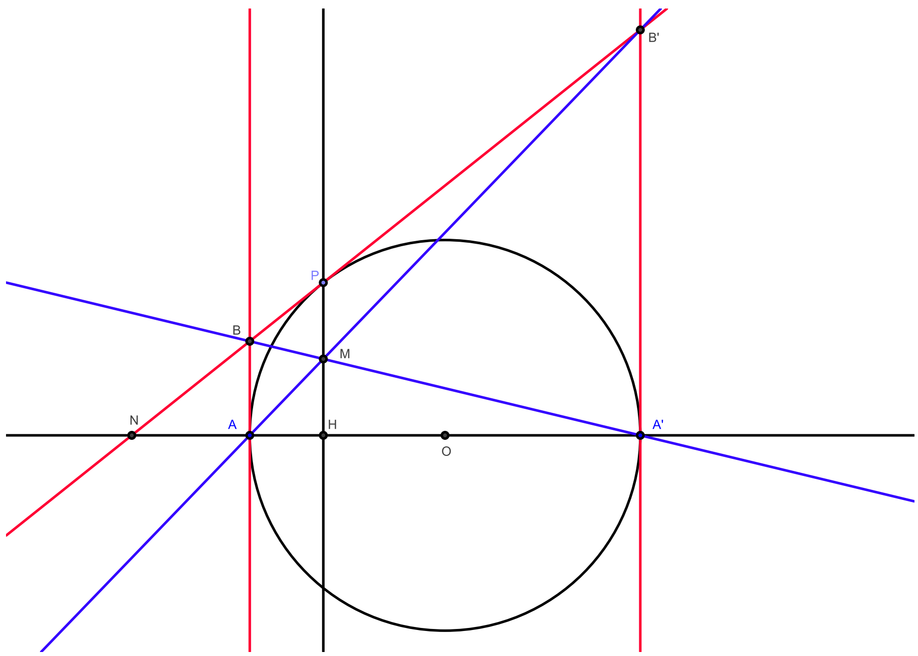
CORRE Alain
03000 Moulins

Problèmes d'antan du bulletin 476

Exercice 3 :

Notations :

– $(\mathscr{C})$ désigne un cercle de centre O et de diamètre $[AA']$
– P est un point du cercle $(\mathscr{C})$ distinct de A et de A'.
– Les tangentes à $(\mathscr{C})$ en A et P se coupent en B
– Les tangentes à $(\mathscr{C})$ en A' et P se coupent en B'
– Les droites (BA') et (AB') se coupent en M
– Les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en N
– I est le milieu du segment $[AB]$
– J est le milieu du segment $[A'B']$
– H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AA')



On sait que $BA = BP$ et que $B'A' = B'P$, et ces quantités sont non nulles puisque P est distinct des points A et A'. On peut donc écrire :

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{BA}{B'A'} = \frac{BA}{AA'} \times \frac{AA'}{B'A'}$$

Les triangles $A'MH$ et $A'BA$ sont semblables, donc :

$$\frac{BA}{AA'} = \frac{MH}{HA'}$$

Les triangles AMH et $AB'A'$ sont semblables, donc :

$$\frac{AA'}{B'A'} = \frac{AH}{MH}$$

Ces propriétés entraînent :

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{HA}{HA'}$$

De plus, P appartenant au segment $[BB']$ et H au segment $[AA']$, on peut appliquer la réciproque du théorème de THALES :

La droite (PH) est parallèle aux droites (AB) et $(A'B')$.

Comme la droite (MH) est, par construction, parallèle à la droite (AB) :

Les points P, M et H sont alignés

L'homothétie de centre M qui transforme A en B', transforme B en A' et I en J (utilisation des propriétés de l'homothétie : l'image d'une droite est une droite parallèle et l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image).
Les points M , I et J sont donc alignés.
Pour des raisons analogues, en utilisant l'homothétie de centre N qui transforme A en A', les points N, I et J sont alignés.
En utilisant l'homothétie de centre N qui transforme A en H, l'image du point B est le point P est l'image du point I est le point M, en conséquence :

M est le milieu du segment $[PH]$

Les points P et M sont situés du même côté de la droite (AA'), donc :

$$\overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{PH}$$

M est donc l'image de P par l'affinité orthogonale de base la droite (AA') et de rapport $\frac{1}{2}$.

M décrit donc l'image du cercle $(\mathscr{C})$ (privé des points A et A') par cette affinité, c'est à dire l'ellipse d'axe focal (AA'), de demi-axe focal le rayon de $(\mathscr{C})$ et de demi-axe non focal la moitié du rayon de $(\mathscr{C})$ (privé des points A et A').