Une bien étrange perspective

Marc Roux, Gérard Kuntz(*)

Voici la première traduction du partenariat entre le BV et MathémaTICE(1). Elle consiste, à partir d'un article déjà en ligne, à écrire un texte qui s'en inspire étroitement, tout en s'inscrivant dans la ligne éditoriale du Bulletin de l'APMEP. Les deux articles diffèrent profondément, on n'écrit pas de la même façon sur papier et en ligne. L'article qui suit se suffit à lui-même, il peut être lu *indépendamment du texte numérique*. Mais ce dernier lui apporte des prolongements et un éclairage qui méritent attention. Ce couple d'articles, proches et différents, résume la philosophie du partenariat esquissé entre les deux revues : conduire chacune, par de nombreuses interactions, à progresser en contenu et en forme, à prendre en compte ce qui fait la force de l'autre : la rigueur et la pérennité de l'écrit pour le BV, la possibilité d'expérimenter, de simuler, de modifier facilement le contenu, pour MathémaTICE. Nous espérons que cette première expérience sera suivie de bien d'autres et qu'il en sortira une nouvelle écriture, mariant harmonieusement le papier et l'écran.

Petite histoire de l'article

Membre du comité de rédaction de MathémaTICE, j'ai(2) vu passer depuis près d'un an de nombreux articles. Celui d'Yves Martin, « *La géométrie dynamique à l'épreuve de l'homologie didactique* », paru en novembre 2006(3), me semblait emblématique de ce qu'apporte la publication en ligne : l'accès aux figures dynamiques *dans le corps de l'article* lui confère un caractère expérimental qui en fait la force et l'attrait. L'article reposait sur une propriété surprenante (que j'ignorais) : *dans toute perspective cavalière, il existe une direction de plans et une seule, autre que les plans de face, dans lesquels les segments sont représentés en vraie grandeur !* Pour donner un contenu au partenariat entre les deux revues, ce pouvait être (me semblait-il) un point de départ idéal.

Je suis donc allé sur le site de MathémaTICE pour capter (par copier/coller) texte et figures de l'article (Yves Martin l'avait directement rédigé sous SPIP(4)). J'imaginais (très naïvement) que des aménagements mineurs rendraient ce texte publiable sur papier et intéressant pour les lecteurs.

En juin 2007, j'ai envoyé le message suivant aux membres de la commission du BV (avec l'article joint), un « défi pour les jours pluvieux d'un été qui s'annonçait pourri » :

(*) marc.roux15@wanadoo.fr ; g.kun67@free.fr

(1) http://revue.sesamath.net

(2) C'est Gérard Kuntz qui a rédigé le travail commun. Jean-Pierre Friedelmeyer et Yves Martin ont été de bon conseil dans l'élaboration du texte. Les contributions successives de Marc Roux en font un co-auteur à part entière.

(3) http://revue.sesamath.net/spip.php?article4

(4) http://www.spip.net

Je propose à ceux qui le souhaitent de lire le texte joint, d'en faire la critique et de suggérer des améliorations pour une publication dans le BV. Nous pourrons alors proposer une version plus riche que celle déjà en ligne, éventuellement avec des extensions.
Une suggestion : comment aurions-nous décrit la situation mathématique du texte, hors contexte informatique ?
Qui parmi vous serait partant pour y travailler ?

L'appel aux membres de la commission du Bulletin reste rarement sans réponse. Celles que je reçus, presque par retour de courrier, soulignaient ma … profonde méprise.

Jean-Pierre Friedelmeyer :
J'ai essayé de lire le texte et la solution proposée dans le fichier. Hélas, je n'y comprends pas grand chose ! Sans doute est-ce dû à mon inexpérience de l'utilisation des logiciels et des méthodes de géométrie dynamique. Crois-moi : je n'ai aucun parti pris, aucun a priori, et j'étais prêt à entrer dans les démarches proposées. Mais je pense néanmoins que le texte proposé gagnerait à être clarifié, particulièrement en distinguant ce qui est activité et recherche géométrique, de ce qui est le commentaire didactique.

Marc Roux, intéressé par le fond de l'article, relevait de nombreux défauts de rédaction qui, selon lui, rendaient le texte impubliable en l'état : « Ces défauts de rédaction n'enlèvent rien au fond, et sont assez rapidement réparables ; je serais favorable à une rédaction revue et clarifiée, **mais pas à celle-ci** ! »

Connaissant les qualités de géomètres de mes interlocuteurs, et leur habileté à détecter les forces et les faiblesses des articles qui leur sont soumis, je compris que le texte devait être *totalement récrit* pour le BV. Je compris surtout que j'avais lu (et relu) le texte en ligne *du seul point de vue expérimental*, sans m'attarder aux « détails de rédaction », intéressé surtout par ce que *« montraient les figures dynamiques incluses dans texte »*.
Privés de ces avantages, mes re-lecteurs ont pris de plein fouet les nombreuses imperfections et erreurs (de détail pour la plupart) que la spécificité du texte en ligne m'avait masquées.

À partir des suggestions et des critiques précises de Jean-Pierre et de Marc, j'ai entrepris d'écrire un texte neuf, rigoureux en mathématique et qui ne doive rien à l'informatique. De nombreux aller et retour furent nécessaires avec eux(5) : le problème se révéla bien plus complexe que ne le laissait apparaître le document numérique. Une des difficultés majeures consistait à savoir si on travaillait *sur une figure plane ou dans l'espace*. Le lecteur qui ira au bout de l'article connaîtra probablement la même perplexité.

Ainsi donc, le projet initial venait d'évoluer en profondeur : l'article d'Yves Martin laissait place à un texte nouveau, élaboré et discuté à quatre (l'auteur initial participait évidemment au débat, depuis son île de La Réunion), avec un accent marqué sur la rigueur mathématique de la situation. En même temps, l'article déjà en ligne allait bénéficier des nombreuses améliorations du document papier en

(5) Le courrier électronique est, à cet égard, un outil irremplaçable !

gestation. La confrontation des supports faisait évoluer simultanément les deux écrits[6] !

Le texte que vous allez lire est un exemple de travail collaboratif à distance. Ensemble, nous sommes allés plus loin et nous avons fait bien mieux que chacun de nous, livré à lui-même. La situation mathématique a été clarifiée. Les aspects expérimental (force de l'article en ligne) et didactique demeurent dans le texte numérique : nous espérons que, parvenus à la fin de l'article sur papier, les lecteurs du BV se risqueront à l'expérimentation proposée en ligne. Ils pourront alors nous envoyer leurs impressions, des suggestions et des critiques, qui feront encore évoluer les deux textes : je m'engage dans ce cas à donner, dans le BV et dans MathémaTICE, un écho à ces propositions.

Une propriété mathématique mise en évidence au hasard d'une activité en environnement informatique

En 1993-94, un club mathématique de La Réunion travaille avec ardeur (et avec CABRI II), sous la direction d'Yves Martin. Il s'agit de construire avec le logiciel la figure d'un cerceau circulaire posé contre les trois murs aboutissant à un coin d'une pièce. On peut ajouter à la figure les tangentes au cercle aux trois points de contact avec les murs : on retrouve alors la figure de la section triangulaire d'un cube, avec le cercle inscrit de surcroît. Dans le cadre de la perspective cavalière, on attend bien sûr que la figure sur l'écran soit une ellipse, tangente aux trois côtés du triangle en leur milieu.

Or voici qu'un des groupes trouve un cercle (CABRI II confirme sa nature : *c'est un vrai cercle* et pas seulement une ellipse proche d'un cercle). C'est la fin de la séance. Yves dit aux élèves qu'ils ont probablement fait une erreur et qu'il regarderait cela le soir même.

« Je refais la figure, et je tombe sur le même cas. Perturbé, sachant que cette version *bêta* de Cabri II peut avoir des bugs, j'en parle à notre maître en géométrie, Christian Camalon (il a une vraie vision de l'espace). Il me dit la même chose que j'avais dit à mes élèves, et me rappelle deux heures plus tard pour me dire qu'il tombe sur *le même bug Cabri* ! ».

« Du coup, ayant cru déceler un bug (Cabri croit reconnaître un cercle quand une ellipse en est trop proche), je téléphone à Jean Marie Laborde[7] (on n'avait pas Internet à l'époque à La Réunion) qui me répond avec sa malice habituelle : « Tiens tu as trouvé ça avec Cabri, c'est pas mal ». Et de m'expliquer que ce n'est pas un bug, mais que ça montre au contraire que Cabri se débrouille fort bien : *tu viens de mettre en évidence une propriété mathématique très peu connue* ».

Rappelons cette propriété : *dans toute perspective cavalière, il existe une direction de plans et une seule, autre que les plans de face, dans lesquels les segments sont représentés en vraie grandeur !*

(6) Bel exemple de « boucle de rétroaction », chère à Edgar Morin (boucles génératrices dans lesquelles les produits et les effets sont eux-mêmes producteurs et cause de ce qui les produit).
(7) Un des « pères » de Cabri Géomètre.

L'étude complète de cette situation(8) est en ligne dans AbraCadaBri(9). Voici les démonstrations de la propriété (et ses prolongements) que les auteurs de l'article ont concoctéés ensemble(10).

Un problème de géométrie dans l'espace

Trois énoncés du problème (grâce à ce qui précède, ils ne tombent pas du ciel).

1°) La forme directive.
Montrer que dans toute perspective cavalière, il existe une direction de plans et une seule, autre que celle du plan de face, dans lesquels les segments sont représentés en vraie grandeur !

2°) Une forme plus ouverte.
Est–il possible, dans une perspective cavalière, que les segments d'un plan (autre que les plans de face) soient représentés en vraie grandeur ?

3°) Une formulation plus générale encore, en relation avec la genèse du problème.
Est–il possible, dans une perspective cavalière, que les courbes et les figures d'un plan (autre que les plans de face) soient représentés en vraie grandeur ?

Analyse du problème.

Soit un cube ABCDEFGH dessiné en projection cavalière.

S'il existe un plan (IJK), I sur [CD], J sur [BC], K sur [CG], tel que le triangle IJK soit en « vraie grandeur », (*les trois segments ont même longueur sur la figure de l'espace et sur la figure plane en perspective cavalière*), tout autre plan parallèle à (IJK) coupant les trois arêtes du cube vérifie la même propriété. En effet, une homothétie de centre C fait passer de l'un des plans à l'autre.

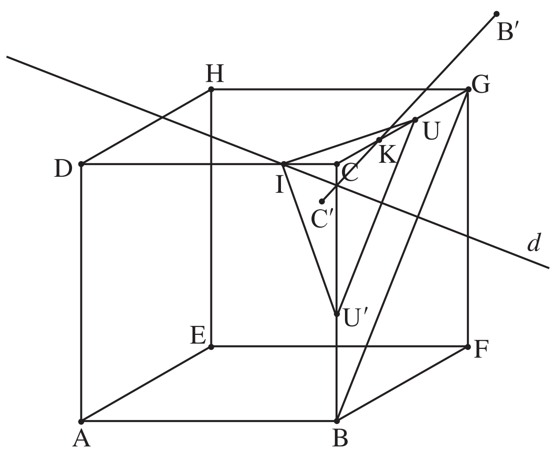

Figure 1 : Figure d'analyse

(8) http://www-cabri.imag.fr:80/abracadabri/GeoEspace/PlanVG/PlanVGBase.html
(9) http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/WabraGene/abraGene.html
(10) La principale difficulté a été de préciser si nous raisonnions « dans le plan de la figure » ou sur la figure de l'espace…

Fixons donc I sur [CD].
Soit alors U *un point quelconque sur* [CG]. Pour avoir la vraie grandeur de [IU], Il suffit de faire tourner la face du haut pour en faire la face avant. G vient en B et U en U′ : donc (BG) et (UU′) sont parallèles, ce qui permet de construire U′. En effet, *dans la réalité* (dans l'espace, sur le vrai cube), CU = CU′ et CB = CG, d'où, d'après Thalès, le parallélisme de BG et UU′. La perspective cavalière conserve le parallélisme, donc *sur le dessin* (sur la figure ***plane***), il y a aussi parallélisme.

Le raisonnement qui suit (en italique) se passe ***sur la figure plane***(11).

Pour que [IU] *soit en vraie grandeur, il faut et il suffit que* IU = IU′ *sur le dessin*(12), *donc que* IUU′ *soit isocèle en* I *sur le dessin*(13).
La hauteur d du triangle IUU′ *issue de* I *est donc axe de symétrie du triangle. C'est aussi la perpendiculaire à* (BG).
U′ *étant sur* [BC], U *doit être sur* [B′C′]*, symétrique de* [BC] *par rapport à d.* U *est donc commun à* [B′C′] *et à* [CG].

Si donc U *existe, c'est l'unique intersection*(14) *de* [B′C′] *et* [CG]. *Renommons cet unique point* K.

Synthèse du problème.

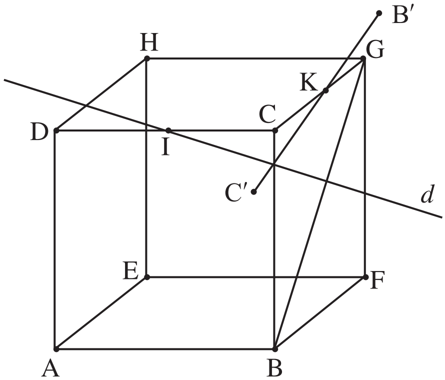

Figure 2 : Figure de synthèse.

(11) Une remarque de Marc Roux : « Je me demande si, pour être parfaitement clair, il ne serait pas bon de donner des noms différents aux points de l'espace et aux points qui les représentent dans le plan du dessin ; par exemple attribuer à ces derniers la même lettre que le point réel, mais en minuscule. Ca donnerait par exemple “ *u*′ étant sur [*bc*], *u* doit être sur [*b*′*c*′], symétrique de [*bc*] par rapport à *d*. *u* est donc commun à [*b*′*c*′] et à [*cg*] ”. »
(12) En effet, dans la réalité, **dans l'espace**, quel que soit U, IUU′ est toujours isocèle par définition de U′.
(13) Cf. note 12.
(14) Nous laissons au lecteur la discussion à propos de l'existence de ce point. Il peut vérifier que ce point n'existe pas toujours, [B′G′] et [CG] pouvant se couper en dehors de l'arête du cube (la figure dynamique le montre sans ambiguïté). Il peut aussi se reporter au traitement analytique de Marc Roux, qui donne dans la suite de l'article une justification de l'existence de K (et aussi de J) en fonction de la position de I.

La figure ci-dessus résume la construction de K à partir de I.
Par I on mène la perpendiculaire *d* à [BG]. [B′C′] est le symétrique de [BC] par rapport à *d*. K (position particulière de U) est l'intersection de [B′C′] et de [CG].
K *est l'unique point sur* [CG] *pour lequel* [IK] *a même longueur sur la figure plane et* ***sur la figure de l'espace***.

Construction de J (il dépend de K, donc du choix initial de I).

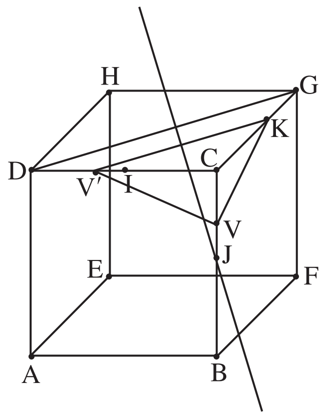

Figure 3

Le raisonnement étant proche de celui qui précède, nous le présentons dans les grandes lignes.

I et K étant connus (K dépend du choix de I), désignons par V un point quelconque sur [BC]. Construisons comme précédemment [VK] en vraie grandeur (rotation autour de [CB]). [VV′] est la vraie grandeur de [VK] *sur le dessin*.

VKV′ doit être isocèle en V *sur le dessin*. V est donc à l'intersection (si elle existe) de la médiatrice de [V′K] et de l'arête [BC]. Nommons J le point obtenu[15] (J est l'unique position de V telle que [VK] soit en vraie grandeur).

Conclusion

I, J, K *ayant le sens précisé plus haut,* [IK], [JK], *et bien sûr* [IJ] *sont en vraie grandeur : leur longueur dans l'espace et sur la figure plane (en perspective cavalière) coïncident.*

Chaque choix de I *engendre donc au plus un plan solution (voir les notes 13 et 14). On a donc au final une direction de plan unique associée à chaque perspective cavalière dans laquelle les objets sont représentés « en vraie grandeur ».*

D'autres regards sur la même propriété

À peine nous étions-nous mis d'accord sur la rédaction qui précède (après moult aménagements et corrections) que je reçus une autre solution de ce problème : Marc Roux

(15) Voyez la note 13.

avait pris plaisir à varier les approches, comme il est de coutume à l'APMEP. Voici une de ses propositions.

Je considère comme acquis que si un triangle est en vraie grandeur, alors tous les segments de son plan sont en vraie grandeur(16), et que si les segments d'un plan P sont en vraie grandeur, alors il en est de même pour tout plan parallèle à P. On recherche donc dans la suite un triangle représenté en vraie grandeur.

Je distinguerai dans ce qui suit les longueurs, mesures algébriques, angles, *réels*, c'est-à-dire tels qu'ils sont dans l'espace, notés par exemple AB, $\overline{AB}$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$ des longueurs, mesures algébriques, angles, *sur le dessin plan*, que je noterai AB_d, $\overline{AB}_d$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)_d$.

Démonstration à partir d'un cube :

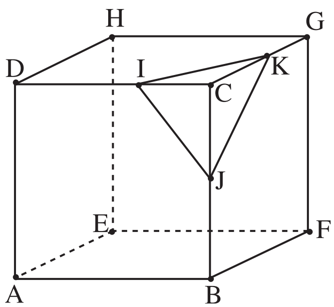

Figure 4

Je choisis comme sens positif sur les arêtes, les sens de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AD}$.

La face ABCD du cube étant dans un plan frontal, une perspective cavalière est déterminée par son angle $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$, et son rapport $k = \dfrac{AE_d}{AE} = \dfrac{AE_d}{AB}$.

Si un segment [UV] est porté par une fuyante (droite de la direction de (CG)), alors $UV_d = k \cdot UV$

(16) En effet, une perspective cavalière est une projection cylindrique (voir plus bas). Si U et V sont dans le plan (ABC), alors il existe x, y tels que $\overrightarrow{UV} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$; A′, B′, C′, U′, V′ étant les images de ces points par projection, et sachant que la projection conserve les rapports de vecteurs, on a $\overrightarrow{U'V'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$; si AB = A′B′ et AC = A′C′, on en déduit UV = U′V′. Plus généralement, dans le tome 4 (*Algèbre bilinéaire et géométrie*) du *Cours de mathématiques* d'Arnaudies et Fraysse chez Dunod, le théorème VI.I.3 page 226 (*prolongement d'isométries*) affirme : Soit E un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ et soit g une application isométrique définie sur une partie non vide F de E. Alors il existe une isométrie f de E telle que la restriction de f à F est g. Si de plus F engendre E affinement, alors f est unique.

Le plus souvent, comme dans la figure ci-dessus, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $k \in]0,1[$; cependant la considération de mesures algébriques, au lieu de longueurs, permettra de rendre le raisonnement valable dans tous les cas.

Soient I, J, K trois points appartenant respectivement aux *droites* (DC), (BC), (CG) (pas nécessairement aux segments).
[IJ], dans un plan frontal, est en vraie grandeur.

[IK] est en vraie grandeur si et seulement si $IK_d = IK$; or $IK^2 = IC^2 + CK^2$, et

$$IK_d^{\ 2} = IC_d^{\ 2} + CK_d^{\ 2} - 2IC_d \cdot CK_d \cdot \cos\left(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CI}\right) = IC^2 + k^2CK^2 + 2k \cdot \overline{IC} \cdot \overline{CK} \cdot \cos\alpha$$

(car si $\overline{IC}$ et $\overline{KC}$ ont le même signe, alors $\left(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CI}\right) = \pi - \alpha$, sinon $\left(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CI}\right) = -\alpha$).

Donc [IK] est en vraie grandeur si et seulement si :

$$IC^2 + CK^2 = IC^2 + k^2CK^2 + 2k \cdot \overline{IC} \cdot \overline{CK} \cdot \cos\alpha\,,$$

ce qui équivaut à :

$$\overline{CK}^2 (1 - k^2) = 2k \cdot \overline{IC} \cdot \overline{CK} \cdot \cos\alpha\,,$$

soit

$$\overline{CK} = \frac{2k \cdot \overline{IC} \cdot \cos\alpha}{(1 - k^2)}$$

Ceci (pour k ≠ 1) prouve l'existence et l'unicité de K, et permet de placer K sur le dessin :

$$\overline{CK}_d = \frac{2k \cdot \overline{IC} \cdot \cos\alpha}{(1 - k^2)}$$

De même, [KJ] est en vraie grandeur si et seulement si $KJ_d = KJ$, ce qui s'écrit :

$$CJ^2 + CK^2 = CJ^2 + k^2CK^2 - 2k \cdot CJ \cdot CK \cdot \cos\left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK}\right)$$

ou encore :

$$CK^2\left(1 - k^2\right) = -2k \cdot CJ \cdot CK \cdot \cos\left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK}\right)$$

(car si $\overline{CJ}$ et $\overline{CK}$ ont le même signe, alors $\left(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CJ}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, sinon $\left(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CJ}\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$).

Donc [KJ] est en vraie grandeur si et seulement si $\overline{CJ} = -\frac{\overline{CK}(1 - k^2)}{2k \sin\alpha}$, ce qui montre l'existence et l'unicité de J (pour $k \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ [mod π]).

Mais de plus, en remplaçant $\overline{\mathrm{CK}}$ par la valeur obtenue précédemment, on obtient :

$\overline{\mathrm{CJ}}=-\dfrac{2k\overline{\mathrm{IC}}\cos\alpha}{1-k^2}\cdot\dfrac{1-k^2}{2k\sin\alpha}=-\dfrac{\overline{\mathrm{IC}}}{\tan\alpha}$; $\overline{\mathrm{CJ}}$ dépend de α, mais est indépendant de k.

Sachant ceci, J se construit très simplement : $\dfrac{\overline{\mathrm{CJ}}}{\overline{\mathrm{IC}}}=-\dfrac{1}{\tan\alpha}=-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$, d'où $\left(\overrightarrow{\mathrm{IC}},\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\right)=-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$. **Il suffit donc de mener par I la perpendiculaire *sur le dessin plan* à (BF)** (ou à (DH)…) : **elle coupe (BC) en J**.

Exemple : si $k=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, on obtient : $\overline{\mathrm{CK}}_{\mathrm{d}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{IC}}$ et $\overline{\mathrm{CJ}}=-\dfrac{\overline{\mathrm{IC}}}{\sqrt{3}}$; voici le cas de figure correspondant :

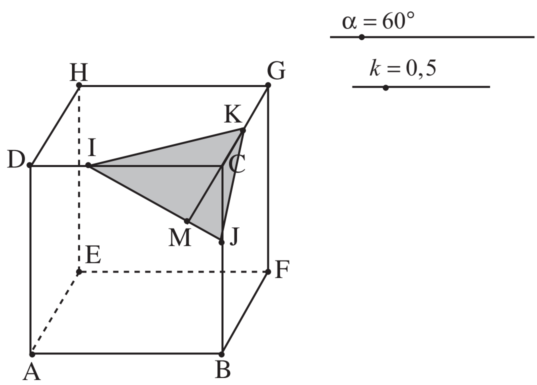

Figure 5

On pourra vérifier que les mesures de IK et KJ sur le dessin correspondent bien aux longueurs calculées par Pythagore à partir des longueurs réelles de IC, CK, CJ.

En fait, c'est tout simple !

C'est l'exclamation (l'Eurêka) de Marc Roux dans un nouveau courrier : il venait de terminer le tour du problème. C'est au bout d'une réflexion approfondie qu'émergent les idées les plus simples.

La représentation en perspective cavalière d'une figure de l'espace F dans un plan P est sa projection sur P, selon une direction de droites (d) (non orthogonale à P). Soit une figure F contenue dans un plan Q.

Si Q est parallèle à P, la représentation de F est en vraie grandeur ; Q est un plan frontal. Vue de profil :

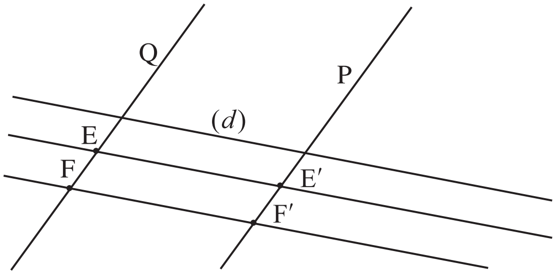

Figure 6

Soit π un plan orthogonal à (*d*). Soit P′ le plan symétrique de P par rapport à π ; si Q est parallèle à P′, la représentation de F est en vraie grandeur. Vue de profil :

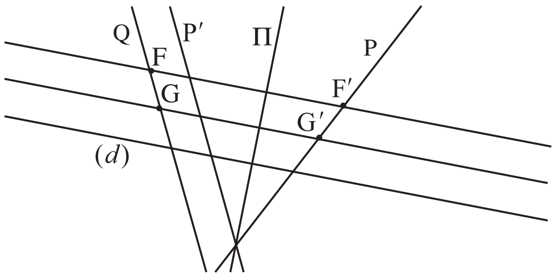

Figure 7

Les deux assertions qui précèdent me semblent assez évidentes pour se passer de démonstration.

Réciproquement, si Q contient un triangle représenté en vraie grandeur, alors Q est parallèle à P ou à P′. En effet : soient A, B, C trois points non alignés de Q, A′, B′, C′ leurs images par la projection sur P selon la direction (*d*) ; la représentation est en vraie grandeur, c'est-à-dire A′B′C′ est isométrique à ABC, si et seulement si ABB′A′, ACC′A′ et BCC′B′ sont tous des parallélogrammes ou des trapèzes isocèles. Si deux d'entre eux sont des parallélogrammes, alors P contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes de Q, donc P et Q sont parallèles. Si deux d'entre eux sont des trapèzes isocèles, par exemple ABB′A′ et ACC′A′, alors [AA′] et [BB′] ont, dans leur plan, une médiatrice commune δ_1, et de même [AA′] et [CC′] ont une médiatrice commune δ_2, dans leur plan. δ_1 et δ_2 déterminent un plan π qui est le plan médiateur de [AA′], mais aussi de [BB′] et [CC′] puisqu'il contient leurs milieux et leur est perpendiculaire. Les plans P = (ABC) et Q = (A′B′C′) sont donc symétriques par rapport à π ; et π est orthogonal à (*d*), puisque (AA′) ∈ (*d*).

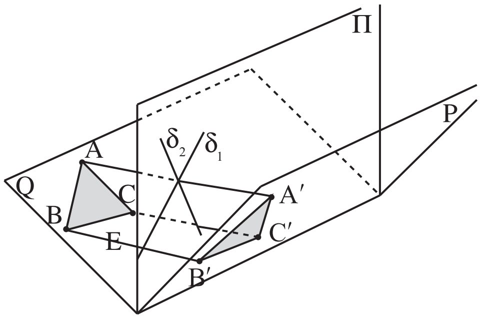

Figure 8

Remarque complémentaire :

Cette façon de prouver l'existence des figures représentées en vraie grandeur ne permet pas de construire ces figures sur un cube. Par contre la construction proposée par Yves Martin permet de déterminer la direction (d) *de la projection.*
En effet, revenant à la figure 4, choisissons par commodité I confondu avec D ; J et K sont comme plus haut les points de (BC) et (CG) tels que DJK est représenté en vraie grandeur :

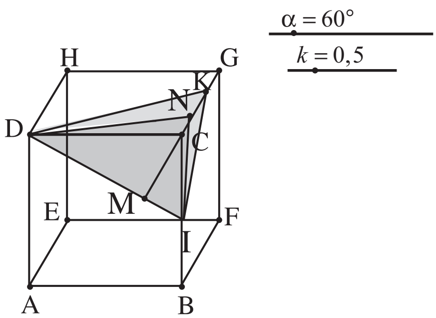

Figure 9

On peut considérer que le plan P sur lequel on projette la figure de l'espace est confondu avec le plan frontal (ABCD) ; (d) étant la direction de la projection, soit π le plan orthogonal à (d) et passant par D. Soit P′ le symétrique de P par rapport à π : d'après l'étude précédente le plan (DJK) est parallèle à P′, et ils ont D en commun, donc P′ = (DJK).
P, P′ et π ont en commun la droite Δ = (DJ) ; π = (DJN), N étant un point de [CK].

Rappelons qu'on a vu plus haut que $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DJ}\right)=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, d'où $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DJ}\right)=\alpha$.

Soit M le projeté orthogonal de C sur D. Le plan (CMK) est perpendiculaire à Δ : en effet (CK) ⊥ (ABCD) donc (CK) ⊥ (DJ) ; (DJ) ⊥ (CK) et (DJ) ⊥ (MC) donc (DJ) ⊥ (MCK)
On a donc la vue « de profil », dans le plan (CMK), suivante :

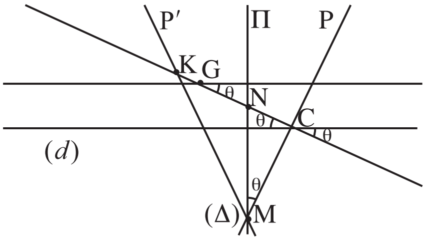

Figure 10

Cette figure montre que l'angle θ de (d) avec (KC) (normale à P) a pour tangente $\dfrac{CG'}{CG}$, c'est-à-dire $\dfrac{CG_d}{CG}$, autrement dit le rapport k de la perspective ; on peut conclure par une interprétation des paramètres de la perspective :

– α est l'angle de la droite Δ avec les arêtes « verticales » du cube (Δ = intersection du plan de projection P avec un plan P′ dans lequel les figures sont représentées en vraie grandeur) ;
– k est la tangente de l'angle θ (angle de (d) avec la direction normale à P).

Enfin la figure 9 permet de placer le point N exactement à sa place sur la figure 8 :

en effet $\dfrac{CN}{CM} = \tan\theta = k$; d'où $CN_d = k\,CN = k^2 CM$.

Précision intéressante, la solution que vous venez de lire a été précédée par une version dans laquelle les figures 5 et 9 étaient erronées. Marc Roux explique : « *J'ai réalisé une figure dynamique avec GeoGebra dans laquelle l'angle* α *et le rapport* k *de la perspective sont pilotés par des curseurs ; le point* I *est piloté à la souris sur* [CD] *; les points* J, K, M, N *sont conformes à ce que nous avons trouvé. À cette occasion j'ai détecté une erreur sur la figure 5 (j'avais placé* K *en confondant* CK-*dessin-plan avec* CK-*espace); cela m'a expliqué pourquoi la position de* N *sur la figure 9 ne me semblait pas très vraisemblable. J'ai donc aussi refait cette figure 9 (en fait les figures 5 et 9 sont deux copies d'écran de la figure dynamique, avec* I *en* D *pour la 9, et* N *caché pour la 5).* »

Nous avons placé cette figure dynamique, qui a permis de détecter l'erreur, sur le site de l'APMEP(17). En manipulant les deux curseurs (k et α), vous pourrez observer les modifications de la figure et mieux comprendre la situation(18).

Ultime rebond !

Lors de la commission du BV qui examinait cet article, Pierre Legrand annonça que *la lecture du texte lui avait inspiré deux autres démonstrations de la propriété*. Il en ajouta une troisième qu'il m'envoya le lendemain. Voici ces trois démarches, très synthétiques, ultimes variations autour de l'exclamation de Marc Roux : ***en fait, c'est tout simple !***

(17) Rubrique **Publications/ Bulletin vert/ sommaires/ sommaire du n° 473.**
(18) C'est aussi l'occasion de télécharger Geogebra et de tester ce remarquable logiciel libre et gratuit.

Méthode 1 (totalement élémentaire)

La perspective cavalière n'est rien d'autre qu'une projection oblique sur un plan P parallèlement à une direction δ. Soit O un point de P et Q le plan perpendiculaire à δ passant par O. Appelons R l'image de P par la symétrie orthogonale relativement à Q (le lecteur est invité à réaliser cette figure simple, ainsi que celle de la réciproque à venir).
La restriction à R de la perspective cavalière étudiée n'est autre que cette symétrie orthogonale. Elle conserve les distances. On a donc trouvé la seconde direction de plans cherchée.
Commentaire : C'est totalement évident … *a posteriori*. Et en apparence, cela règle complètement la question. Mais dans tout Éden il y a un serpent : on n'a pas prouvé que ces deux directions de plans sont les seules qui conviennent. Montrons-le.
Soient deux points A et B, de perspective A′ et B′ sur le plan P parallèlement à δ. Si A′B′ = AB, le quadrilatère ABB′A′ a deux côtés parallèles, AA′ et BB′, et deux côtés de même longueur, AB et A′B′.
Ou bien c'est un parallélogramme et le segment AB est parallèle à P, ou bien c'est un trapèze isocèle (convexe ou croisé) et la droite joignant le milieu H de AA′ au milieu K de BB′ en est axe de symétrie. A′B′ est donc symétrique de AB par rapport au plan Q perpendiculaire à δ contenant H et K ; il est donc dans le plan symétrique de P par rapport à Q.

Méthode 2 (niveau Terminale S)

On met le problème en équation dans un repère orthonormal Oxyz, le plan de la figure étant xOz et le point de coordonnées (0,1,0) ayant pour perspective le point (a,b) du plan xOz.
Alors le point (x,y,z) a pour perspective le point $(x + ay, z + by)$. L'origine étant conservée, les formules pour les vecteurs sont les mêmes. Écrivons l'égalité des carrés scalaires :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + ay)^2 + (z + by)^2$$

soit :

$$y\,(2ax + (a^2 + b^2 - 1)y + 2bz) = 0.$$

On trouve bien un second plan, manifestement distinct du premier.
Commentaire : indiscutablement efficace, mais on reste sur sa faim. Quelle est la réalité géométrique derrière ce calcul ?

Méthode 3 (niveau DEUG)

La perspective cavalière étant une transformation affine, elle induit sur les vecteurs une transformation linéaire φ. Alors, pour tout vecteur v, la différence des carrés scalaires de $\varphi(v)$ et de v est une forme quadratique. Cette forme est nulle pour tous les vecteurs du plan de la figure. Elle est donc dégénérée en produit de deux formes linéaires, ce qui met en évidence l'existence d'un second plan vectoriel dont les vecteurs ont leur norme conservée par la perspective.
Commentaire : il reste à prouver que le second plan est distinct du premier. Il suffit d'exhiber un segment non parallèle au plan de référence dont la longueur est conservée. Ce n'est pas difficile, mais encore faut-il le faire.

Ici s'achève *provisoirement* l'étude mathématique du problème. Si je l'ai relatée dans le détail, avec ses approximations, ses hésitations et ses améliorations progressives, c'est qu'elle me paraît exemplaire de toute démarche mathématique honnête. *Face à un problème difficile, l'esprit hésite, tente des chemins de preuves, s'égare parfois, se trompe souvent, revient en arrière, comprend enfin, approfondit et simplifie les démarches validées…* Il serait remarquablement riche et formateur d'introduire les élèves dans cette réalité complexe qui, faute de temps *notamment*, leur est souvent refusée.
D'autres développements de ce problème sont possibles : les petits futés qui lisent le BV ont toute liberté d'en imaginer et de nous les proposer.

Quels usages en classe ?

Il ne me semble pas très difficile de transformer les démonstrations qui précèdent en énoncés pour la classe. Suivant l'intérêt et la compétence des élèves, les énoncés prendront une forme plus ou moins ouverte… Il sera ensuite intéressant *de vérifier l'étrange propriété* mise en évidence, au moyen d'un logiciel de géométrie dynamique (toutes les figures qui précèdent sont des copies d'écran de figures dynamiques).
Mais il est sans doute bien plus intéressant de faire refaire aux élèves, au moyen de la géométrie dynamique, le chemin qui conduisit Yves Martin à la mise en évidence de la propriété, puis de la démontrer.
Celles ou ceux qui tenteront l'aventure pourraient ensuite s'en faire l'écho dans le BV : la rubrique « Dans nos classes » n'est pas submergée de propositions !

Retour au texte numérique

L'article en ligne d'Yves Martin dont le présent texte s'est inspiré a un tout autre angle d'attaque : il utilise la situation mathématique que nous avons analysée *en formation initiale des enseignants à l'IUFM*. L'homologie didactique, dont parle son titre est la démarche qui consiste, pour les enseignants, à faire le même chemin que celui qu'ils proposeront ensuite à leurs élèves. Ce n'est pas triste ! C'est décapant et remarquablement formateur. L'expérimentation y tient une place centrale. Raison de plus, maintenant que vous êtes au bout de notre article, pour aller voir celui qui est en ligne. L'aspect didactique et le travail sur les figures dynamiques complètent l'étude de la situation mathématique que nous avons présentée. Avec un intéressant développement sur la géométrie non euclidienne (à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique).

Conclusion

La lecture conjointe des deux articles souligne la complémentarité des deux modes de publication : aucun ne peut prétendre supplanter l'autre. Leur interaction et leur étude en regard conduisent à l'amélioration de chacun des deux textes. C'est ce que nous voulions souligner, en mettant sur pied le partenariat entre le BV et MathémaTICE. Avons-nous convaincu nos lecteurs ? Leurs réactions et leurs propositions nous intéressent au plus haut point.