Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir ?

Une question de sens

N. Rouche
Louvain-la-Neuve, Belgique

Au moment où débutent ces journées Nationales, tous ceux qui étaient là il y a sept ans se souviennent de leur immense déception lorsque la tempête a sauvagement dispersé, après un jour seulement, les Journées Nationales d'alors. Grâce aux efforts déployés par les organisateurs d'aujourd'hui, nous voici à même de prouver que tous ensemble nous sommes plus forts que la tempête, et qu'elle ne nous empêchera pas de reprendre très utilement le fil de nos propos d'alors.

Donc, il y a sept ans, nous étions en tain de parler du problème du sens dans l'enseignement des mathématiques (cf. R BKOUCHE ET *AL.* [1991]). Nous avions distingué deux acceptions du mot sens, à savoir *le sens étroit et le sens large.* « Le premier assigne à chaque unité du discours un unique référent, il évoque la précision, la rigueur ; le second multiple les référents, il correspond à la richesse, à l'imagination, à la capacité de suggestion. D'un côté on dit : le sens est clair, et de l'autre : c'est plein de sens, ou le sens est profond ».

Reprenons ce thème aujourd'hui à partir de la question : « Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir ». C'est là une formule à l'emporte-pièce, qu'il nous faudra donc commenter et nuancer. Trois auteurs nous y aideront, A. TREFFERS, S. STEIN et P. HILTON, tous trois préoccupés, comme nous, du problème du sens dans l'enseignement des mathématiques. Curieusement, chacun d'eux a aussi proposé une formule à l'emporte-pièce. Nous rapprocherons et commenterons ces formules, ce qui, au passage, nous donnera l'occasion d'introduire la notion de « *type idéal* », empruntée à la sociologie, mais qui pourrait bien nous être utile aussi.

1 - Le schéma de A. Treffers : un exemple de « type idéal »

Considérons le schéma suivant, dû à A. TREFFERS, et qui apparaît dans le dernier ouvrage de H. FREUDENTHAL [1991] :

	horizontal	vertical
mécanique	-	-
empiriste	+	-
structuraliste	-	+
réaliste	+	+

Il discerne quatre façons d'enseigner les mathématiques. Ces quatre façons correspondent à une double distinction, selon que l'on privilégie ou non dans l'enseignement le point de vue *horizontal* ou le point de vue *vertical*. Le premier - le point de vue *horizontal* - est celui qui s'appuie sur la réalité, qui va chercher les mathématiques dans des contextes divers (quotidien, physique, géographique, économique, etc.), où l'on utilise le dessin, les constructions, les manipulations, les perceptions, l'intuition. Le second - le point de vue *vertical* - est celui qui met en avant la théorie, les structures, la logique, la déduction, les démonstrations, la rigueur. Si l'on accepte, fût-ce provisoirement, ces deux vues schématiques, une double dichotomie fournit effectivement quatre façons d'enseigner.

Si on ne privilégie ni le point de vue *horizontal*, ni le point de vue *vertical*, on obtient le type d'enseignement que Treffers appelle *mécanique*. Une question se pose tout de suite : qui peut bien enseigner comme cela ? Personne sans doute, encore que celui-là n'en est pas bien loin qui propose à ses élèves des colonnes de calculs hors de tout contexte et où l'on applique des règles sans lien visible avec une théorie.
L'enseignement *empiriste* par contre privilégie le point de vue *horizontal*, sans trop se soucier du point de vue *vertical*. C'est celui que l'on fait lorsqu'on organise dans la classe des activités et manipulations diverses, quoique sans prendre suffisamment le temps d'en structurer les acquis, d'en tirer des connaissances organisées. L'activité considérée comme un but en soi conduit à ce que Rudolphe Bkouche appelle *l'activisme pédagogique*.

Un enseignement est dit *structuraliste* lorsqu'il est axé sur la théorie et son engendrement, sans lien visible avec un contexte. Un exemple est celui du discours magistral qui enchaîne les axiomes, définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, en donnant parfois un exemple au passage.
Enfin, est-il besoin de le dire, l'enseignement *réaliste* est « le bon ». C'est celui qui se soucie à la fois des contextes problématiques et de la théorie, qui amène les élèves à saisir les liens entre chaque structure mathématique et les questions qui lui ont donné naissance ou en sont les domaines d'application (que ce soit dans les mathématiques ou ailleurs).

Bien entendu, ce schéma en quatre points est une caricature. Enseigner les mathématiques est une activité complexe, pleine de nuances, que chacun de nous pratique de son mieux. Pourquoi voudrait-on ramener les mille et une façon significatives de le faire à quatre types seulement, engendrés par deux dichotomies brutales ? Cela paraît réducteur et malsain.

La réponse est que l'idée n'est nullement de classer les enseignements existants en quatre colonnes. Le tableau de TREFFERS est un exemple de ce que les sociologues et les historiens appellent un *type idéal*. Et comme nous allons le voir, la fonction d'un type idéal n'est pas du tout d'enfermer la réalité dans un carcan d'idées simplistes.

Regardons donc de près ce que l'on désigne sous ce noms de *type idéal*. Le temps que nous passerons à cet examen ne sera pas perdu : la suite de cet exposé en montrera des applications intéressantes - du moins nous l'espérons - aux problèmes que pose l'enseignement des mathématiques.

La notion de *type idéal* est due à Max WEBER[1] [1951] et est devenue un instrument de pensée universelle, très présent aussi dans la sociologie française (ci. P. BOURDIEU et *al.* [1%8] et R. ARON [1948]).

Un *type idéal* est un concept, une construction de l'esprit qui accuse les caractères

[1] Économiste et sociologue allemand (1864 - 1920)

les plus importants d'une situation réelle, qui les schématise en les poussant à l'extrême pour des raisons de clarté. L'objectif d'un type idéal n'est pas de représenter fidèlement la réalité, et donc en ce sens ce n'est pas un *modèle*. On attend d'un modèle qu'il soit le plus proche possible de la réalité qu'il représente, et l'on juge inopportun et gênant, même s'il est souvent et par nature inévitable, tout écart entre le modèle et la réalité. Au contraire, un type idéal doit d'abord être net, établir des distinctions logiques claires. Il ne tend pas à reproduire la réalité, il la stylise.

Lorsque les situations en question sont décrites par des statistiques, c'est-à-dire en terme de moyennes, variances, etc..., le *type idéal* s'oppose au *type moyen*. Ce dernier gomme les différences, alors que le type idéal cherche à les accuser dans la mesure où elles sont significatives, où le fait de les percevoir contribue à l'intelligibilité de la situation[2].

Un type idéal est un instrument conceptuel et linguistique qui permet de passer de la réalité, surtout quand elle est complexe. Comme dit Raymond Aron, « c'est parce que la réalité est obscure qu'il faut l'aborder avec des idées claires ». Un type idéal permet de poser des questions à la réalité et d'émettre des hypothèses. Du fait qu'il ne représente pas la réalité, mais en extrait seulement les relations intelligibles les plus prégnantes, il est sans cesse, lorsqu'on l'applique à des situations réelles, en attente d'ajustements, de correctifs, de compléments d'explication.

En même temps qu'il rencontre l'exigence de clarté qui donne sens à l'activité intellectuelle, le type idéal est le signe d'une pensée qui respecte la réalité, qui a conscience de ne jamais en rendre compte complètement et donc ne se prend pas pour plus forte qu'elle n'est. Le type idéal veut concilier, dans la mesure du possible, la netteté logique et la prudence épistémologique. Il est un instrument de pensée, non un résultat de la science. Il relève de la méthode.

Avant de revenir à l'enseignement des mathématiques et d'évoquer dans ce cadre un autre type idéal, montrons au moins une fois cette notion sur le lieu de sa naissance, en faisant une brève incursion dans la sociologie et l'histoire. Dans l'antiquité grecque et romaine, la famille au sens large (en latin la *gens*) regroupait dans un système hiérarchisé, autour du *paterfamilias*, du foyer et du culte des ancêtres, l'épouse, les enfants, les frères et sœurs, les parents plus lointains, les clients et les esclaves. Dans son célèbre ouvrage La *cité antique* Fustel de Coulanges [1864] donne de la *gens* une vue schématique et claire. Il décrit les relations de pouvoir et de protection dans la *gens*, ainsi que les rites, les modes de circulation et la transmission de biens, etc. C'est la *gens* passée de l'état de fait, multiple et variable, à l'état de concept univoque. Cet ouvrage ne donne une idée fidèle de la *gens* ni à Athènes, ni à Sparte, ni à Rome, ni ailleurs. Mais au moins permet-il, à l'aide de correctifs et de nuances apportées, de parler de ces diverses variantes et de s'en faire une idée différenciée. La cité antique est souvent citée comme exemple de type idéal.

2 - Un autre type idéal : explorer, extraire, expliquer

Partons à nouveau d'un exemple. Voici une question, sans doute assez connue, appropriée à des élèves de collège (et aussi de primaire si on ne la pousse pas jusqu'au

[2]Les exemples de types idéaux présentés ci-après correspondent à des situations qui ne sont guère susceptibles d'être saisies statistiquement. Il nous a paru utile cependant de souligner la distinction entre un type idéal et un type moyen, car une partie des études de didactique des mathématiques s'appuie sur des statistiques.

bout) : quels types de quadrilatères peut-on obtenir en croisant deux bandes de papier semi-transparentes ?

Si on pose une bande étroite sur une bande large, on obtient les types de quadrilatères présentés à la Fig. 1. Si on croise deux bandes d'égale largeur, on obtient la Fig. 2. Enfin si on pose une bande large sur bande étroite, on obtient la Fig. 3.

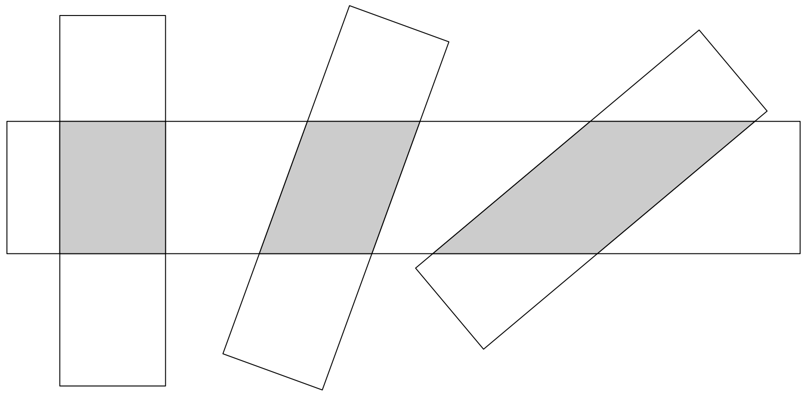

Fig. 1

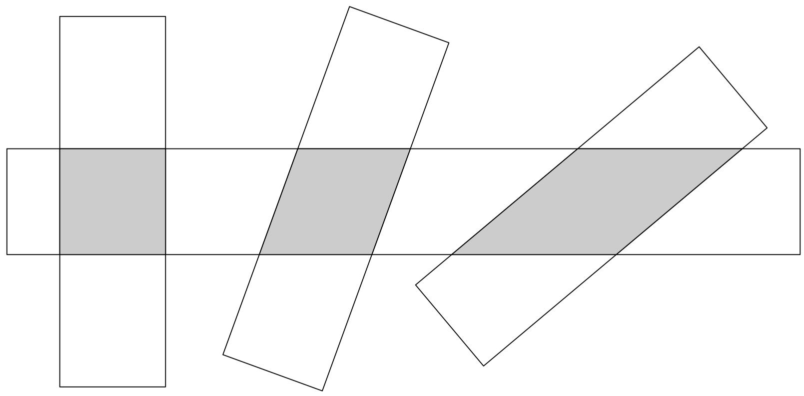

Fig. 2

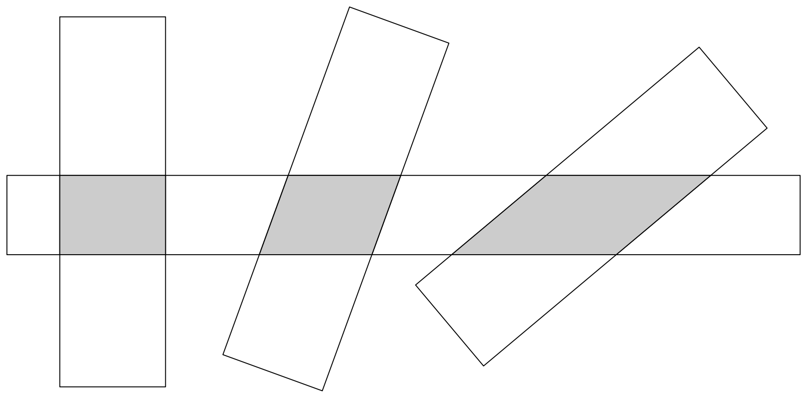

Fig. 3

Tous les quadrilatères obtenus sont des parallélogrammes, puisque chacun a deux paires de côtés parallèles. Sur la Fig. 1, l'un deux est un rectangle. Sur la Fig. 3 aussi, mais il n'est pas dans la même position. Il n'est peut-être pas immédiatement clair, au moins pour des enfants, que les figures 1 et 3 fournissent des résultats équivalents. Croiser deux bandes, une large et une étroite, donne les même quadrilatères, à une isométrie près, quelle que soit l'orientation que l'on donne aux deux bandes sur la table. La Fig. 2 donne un carré et ... à y regarder de plus près, deux losanges. On le vérifie en mesurant leurs côtés, et peut-être aussi en présentant la figure dans une position canonique, où l'on reconnaît plus facilement les losanges (Fig. 4).

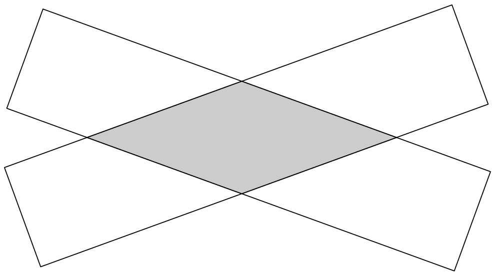

Fig. 4

Mais deux bandes d'égale largeur donneront-elles toujours un losange ? Ce n'est pas évident. C'est une conjecture. On lui donne un peu de vraisemblance supplémentaire en essayant d'autres cas, par exemple en inclinant très allongé (Fig. 5).

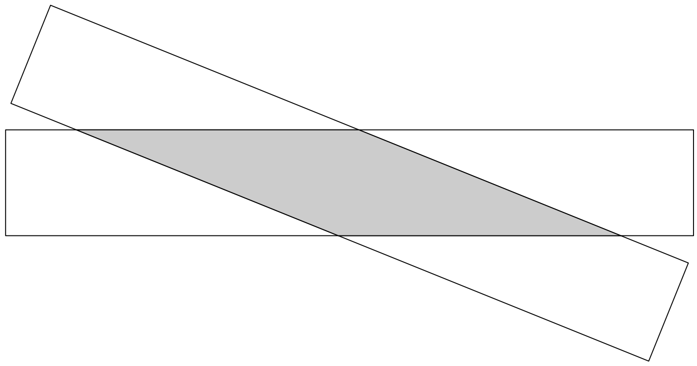

Fig. 5

Il semble, à la fin, qu'en croisant *deux bandes d'égale largeur, on obtient toujours un losange*. Mais il faudrait maintenant prouver cette proposition. Pour cela, il peut être utile d'en donner un énoncé nouveau, qui le rattache aux concepts mathématiques de parallélogramme et de hauteur : *tout parallélogramme qui a ses hauteurs égales est un losange*. Comment prouver cette propriété ? Sur la figure 6, on a dessiné les hauteurs $[AB]$ et $[AD]$. Observons les triangles ACB et AED. Les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{AED}$ sont tous deux égaux[3] à l'angle $\widehat{CFE}$, par la propriété des angles correspondants. Donc les deux triangles sont isométriques du fait qu'ils ont tous leurs angles et deux côtés égaux $[AB]$ et $[AD]$. Ainsi, leurs hypoténuses $[AC]$ et $[AE]$ sont égales. D'où, puisque $ACFE$ est un parallélogramme et qu'il a ses côtés opposés égaux, l'égalité de ses quatre côtés.

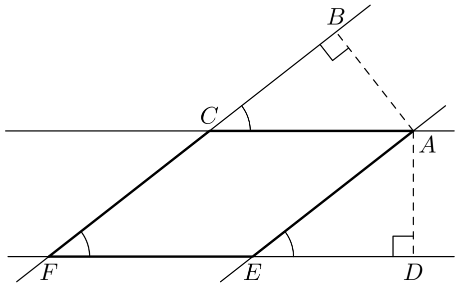

Fig. 6

Cet exemple fait voir trois phases dans le travail : d'abord une phase d'*exploration*, ensuite, une phase dans laquelle l'attention se porte sur un phénomène particulier que l'on énonce

[3]On nous pardonnera de dire, par abus de langage, *égal* pour *isométrique*

(on extrait un énoncé du lot des observations, c'est la phase d'*extraction*) et enfin une phase où l'on démontre l'énoncé, ce qui est une façon d'*expliquer* le phénomène, en le rattachant à des connaissances ecquises antérieurement. On doit à Sherman STEIN [1987] d'avoir ainsi schématisé les trois phases d'un travail mathématique, et de leur avoir associé trois mots commençant par *ex* : il les rassemble en un seul en parlant de *triex*. Ces trois phases d'ailleurs sont rarement successives : le plus souvent, elles s'interpénètrent. Le mouvement spontané de la pensée alterne, selon les besoins, les registres d'exploration, d'extraction et d'explication. Par exemple, un énoncé que l'on vient de clarifier renvoie à de nouvelles questions, une preuve en panne provoque un retour sur l'énoncé, voire sur l'exploration, etc. Le mérite du triex est, face à une consigne donnée, d'en provoquer une analyse qui montre quels registres de la pensée mathématique elle est susceptible de solliciter.

Ainsi le problème du croisement de deux bandes pourrait être formulé de façon plus restreinte, par exemple sous la forme : *Croisez deux bandes de largeur égale. Qu'est-ce que vous observez ? Expliquez.* La phase d'exploration aurait ainsi disparu et seules seraient restées les phases d'énonciation et de preuve.

Une consigne plus restreinte encore serait : *démontrez que tout parallélogramme dont les deux hauteurs sont égales est un losange.* D'autre part, on peut provoquer une exploration en restant sur le plan théorique et, donc, sans proposer aucune manipulation de bandes. Il suffit, par exemple, de demander : *quelles conditions faut-il imposer aux deux hauteurs d'un parallélogramme pour qu'il soit un losange ?*

A l'opposé, on peut ne garder, ou à peu près, que la phase d'exploration. Il suffit de dire : *Qu'est-ce que vous voyez quand vous croisez deux bandes ?*

Le triex de STEIN est un type idéal parce que c'est un schéma clair, et un moyen d'interroger utilement des situations réelles. Voici des exemples des questions qu'il suggère : A quoi sert chacune des trois phases ? Quelles sont les variantes significatives, selon qu'elles sont plus ou moins prises en charge par les élèves ou le professeur ? Quelles relations ont-elles entre elles ? Par exemple, les élèves trouvent-ils dans la phase d'exploration des sources d'arguments utiles pour l'explication ? Dans quel schéma la motivation à démontrer est-elle la plus grande ? Qu'est-ce qui contribue à relancer la pensée[4] ? Etc., etc.

Pour faire bonne mesure, voici un autre exemple de triex. Soit la question : *Dans un plan, de quels points voit-on un segment suivant un angle droit ? Expliquez.* Si on ne demande pas d'expliquer, on risque de voir le travail s'arrêter quelque part entre l'exploration et l'explication. Considérons la variante suivante : *On donne un segment $[AB]$; où peut se trouver le troisième sommet C d'un triangle rectangle ABC ?* La phase d'exploration est plus importante dans ce cas, puisque le lieu des points C demandés comporte maintenant deux droites en plus du cercle ; la phase d'extraction en est d'autant plus significative. Par ailleurs, la variante suivante excamote l'exploration :

[4]Dans notre exemple, les élèves qui ont expérimenté avec deux bandes inégales penseront-ils plus souvent que les autres aux conditions nécessaires : *un parallélogramme ne peut être un losange qui si ses deux hauteurs sont égales ?*

La figure 7 montre un cercle avec un de ses diamètres et quelques angles inscrits ; qu'observez-vous ? Expliquez. Voici une autre variante qui réduit l'activité de l'élève à la phase d'explication : *Démontrez que le lieu des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit est le cercle dont ce segment est un diamètre (à condition d'en exclure les deux extrémités du diamètre...).*

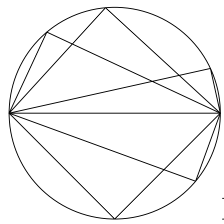

Fig. 7

3 - Un troisième type idéal : illustration et application

Dans une note en bas de page d'ou ouvrage assez ancien, P. HILTON [1973] a proposé de distinguer les illustrations d'une théorie de ses applications. Voici cette distinction reformulée d'une façon entièrement symétrique : une *illustration* d'une théorie est une situation simple qui aide à comprendre la théorie ; une *application* d'une théorie est une situation difficile que la théorie aide à comprendre. HILTON ajoute que les illustrations et les applications sont toutes deux légitimes et ont chacun un rôle à jouer, mais que c'est en quelque sorte une imposture de présenter une illustration en affirmant que c'est une application.

Nous sommes ici à nouveau en présence d'un type idéal. La clarté logique de la distinction ne fait guère de doute. L'application à des situations réelles exige des réserves et des commentaires. En particulier, ce qui est *illustration* pour un esprit averti peut fort bien être *application* pour un débutant. La distinction de HILTON s'applique déjà à des situations très élémentaires. En voici un exemple. Soient A et B deux grandeurs, par exemple du type des objets allongés et rectilignes que l'on peut additionner en les disposant bout à bout, et que l'on peut donc aussi multiplier par un nombre naturel n.

On a les deux propriétés suivantes :

1) La grandeur A prise n fois (c'est-à-dire multiplié par n) est plus petite que la grandeur B prise n fois si et seulement si A est plus petite que B ;
2) La grandeur A prise n fois est égale à la grandeur B prise n fois, si et seulement si A est égale à B.

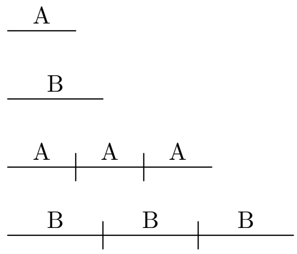

Fig.8

La figure 8 illustre (si besoin est...) la première de ces deux propriétés. En voici par ailleurs une application : *On a deux papiers dont on n'arrive pas à dire s'ils ont ou non la même épaisseur. Que faire ?* Réponse : on prend 500 feuilles de chacun des deux types de papier et on compare les hauteurs des deux tas. La théorie, ou la connaissance qui en tient lieu dans l'esprit de l'élève, intervient ici de manière cruciale pour vaincre une difficulté due aux circonstances et de nature non mathématique : les relations $A = B$, $A < B$ et $B < A$ échappent à la perception. La théorie fournit des équivalents perceptibles.

La distinction entre illustration et application est importante, car elle attire l'attention sur le rôle des théories et des concepts qu'elles mettent en œuvre. Une théorie est certes un monument que l'on peut contempler. Mais elle est aussi un instrument pour penser plus avant que ce soit - et ceci est important - dans le champ des mathématiques elles-mêmes ou bien en dehors[5].

Donnons donc deux exemples encore du type idéal illustration-application.

Au début du calcul vectoriel, on apprend la relation de Chasles. Regardons-la d'abord sur une droite. Si on a des points A, B, C, D, E situés de façon quelconque sur une droite, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

On a une égalité analogue, quel que soit le nombre de points choisis.

Voici quelques exemples *illustrant* cette relation.

Soit trois points A, B, C (fig. 9). On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, mais aussi $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, ou encore $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{0}$ et d'autres égalités analogues.

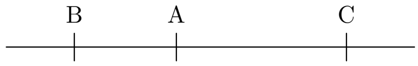

Fig.9

Et voici maintenant une application de la relation de Chasles. *On veut démontrer que la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation, comme le suggère la figure 10.*

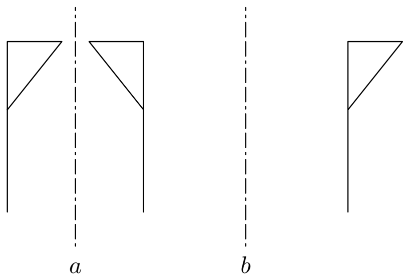

Fig.10

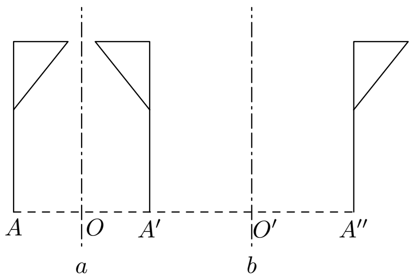

Fig.11

Dans un premier temps, on se sert de l'outil familier qu'est la distance. Soit (Fig. 11) A un point quelconque, A' son image par la symétrie d'axe a, et soit A'' l'image de A' par la symétrie d'axe b. En désignant par d la distance, on sait que, par hypothèse

$d(A, O) = d(O, A')$ et $d(A', O') = d(O', A'')$

$$\begin{aligned} d(A, A'') &= d(A, A') + d(A', A'') \\ &= d(A, O) + d(O, A') + d(A', O') + d(O', A'') \\ &= 2d(O, A') + 2d(A', O') \\ &= 2(d(O, A') + d(A', O')) \\ &= 2d(O, O') \end{aligned}$$

Le point A ayant été choisi quelconque, on a tendance à conclure que tout point « avance » vers la droite d'une même longueur égale à $2d(O, O')$.

Mais c'est aller trop vite en besogne, car le point (quelconque) A peut se trouver n'importe où dans le plan. Et lorsqu'on enchaîne les deux symétries orthogonales, il va, selon sa position de départ, « sauter » dans un sens ou l'autre (Fig. 12).

[5]Il ne faut donc pas identifier *application* à *application à la physique, à l'éconnomie, etc.*

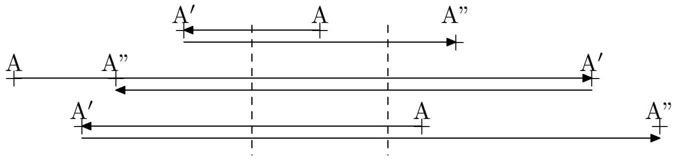

Fig. 12

Il faut donc identifier tous les cas de figure possibles, puis faire pour chacun d'eux un calcul analogue à celui qui est présenté ci-dessus, mais en étant attentif au fait que chaque distance peut devoir être soustraire au lieu d'être additionnée. La démonstration devient lourde et ennuyeuse.

Quel soulagement alors de penser à la relation de CHASLES et aux vecteurs qui, considérés sur une droite, ne sont rien d'autre que des distances munies d'un signe. Alors, on peut en confiance remplacer le calcul ci-dessus par le suivant : on sait par hypothèse que

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{A'O'}} = \overrightarrow{\mathrm{O'A''}}$$

Cherchons à évaluer $\overrightarrow{\mathrm{AA''}}$. On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{A'O'} = \overrightarrow{O'A''} \\
\overrightarrow{AA''} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} \\
&= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'A''} \\
&= 2\,\overrightarrow{OA'} + 2\,\overrightarrow{A'O'} \\
&= 2\,(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'O'}) \\
&= 2\,\overrightarrow{OO'}
\end{aligned}$$

On n'a plus besoin d'examiner séparément chaque cas : ils sont tous compris dans un seul.

Pour donner un troisième exemple de l'opposition entre illustration et application, considérons la règle des signes pour la multiplication des nombres relatifs. Cette règle est généralement perçue par les élèves comme un sommet de l'arbitraire. On s'est ingénié, depuis des siècles, à l'illustrer de diverses façons qu'il serait trop long de rappeler ici. L'une d'elles s'appuie sur la composition des homothéties : on trouve le rapport de la composée de deux homothéties en multipliant les rapports des homothéties composantes qui sont des nombres relatifs. Même s'il s'agit là d'un fait mathématique important, il ne fait pas beaucoup plus qu'illustrer la règle des signes. Il n'en est en tous cas pas une application, car le caractère direct ou inverse de la composée de deux homothéties va de soi, et il n'est nullement besoin de la règle des signes pour l'interpréter.

Certains rapprochent la règle des signes de la combinaison logique des affirmations et des négations : une proposition deux fois niée est affirmative, etc. Mais c'est là plus une métaphore qu'une illustration, puisqu'elle n'a même pas trait à des nombres relatifs. Observons pourtant que cette métaphore a un sens, car elle fait voir une identité de structure.

Considérons ensuite des élèves qui ont appris à représenter diverses relations affines dans un repère constitué de deux demi-axes positifs : par exemple le périmètre $p = 4c$ d'un carré, ou le prix $p = c + kx$ d'une course en taxi en fonction du montant c de la prise en charge, du prix k au kilomètre et du nombre x de kilomètre parcourus.

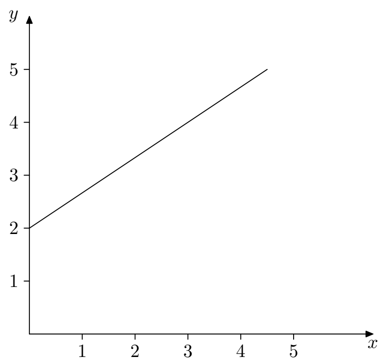

Fig. 13

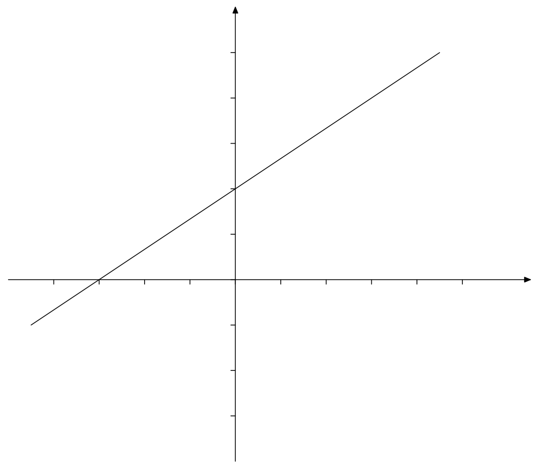

Fig. 14

Soit alors la question suivante : *Dans un repère comme celui de la* figure 13, *on sait représenter une demi-droite par une équation. Comment utiliser un repère comme celui de la* figure 14 *pour représenter une droite ?*

Une solution assez naturelle consiste à utiliser quatre demi-axes positifs, comme le montre la figure 15.
Dans ces conditions, la partie BA de la droite a pour équation $y = 2 + \dfrac{2}{3}x$
pour BC, on a $y = 2 + \dfrac{2}{3}\ \xi$
et pour CD on a $\eta = \dfrac{2}{3}\ \xi - 2$

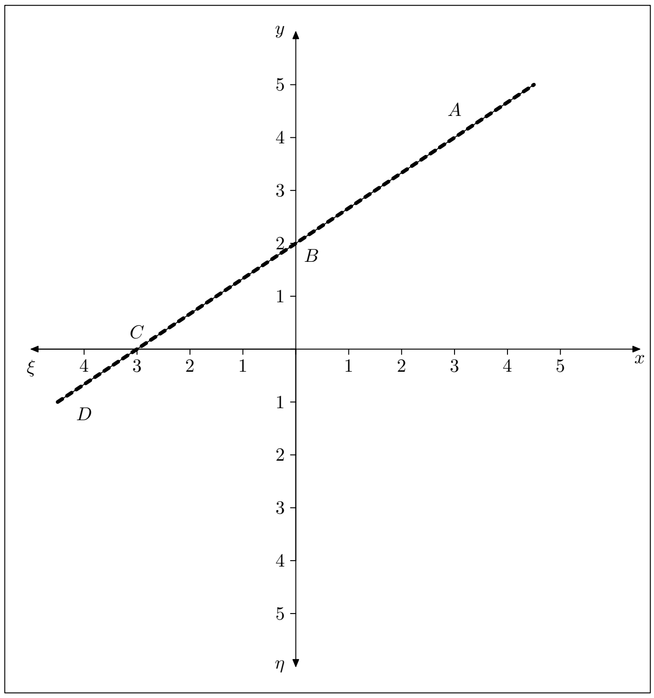

Fig. 15

Quel soulagement de pouvoir recourir aux nombres relatifs, ce qui permet de graduer une droite entière et de ne plus conserver que la première de ces trois équations, en y réinterprétant x et y comme des variables auxquelles on applique la règle des signes et les autres propriétés des nombres relatifs. A défaut de celles-ci, on n'obtient pas une représentation commode de la droite.

On comprend, en regardant cette application, que les nombres relatifs, cotoyés depuis longtemps, soient devenus d'usage courant après l'introduction de la géométrie analytique qu'XVII^{e} siècle. Peut-être cet exemple montre-t-il aussi que la multiplication des nombres relatifs est enseignée prématurément, à savoir à un âge où l'on ne peut pas en exhiber d'application substantielle, et où donc on en est réduit à l'illustrer.

Pour conclure, à propos des *illustrations* et *applications*, reparcourons nos trois exemples. Qu'avons-nous voulu dire à propos des applications en affirmant que la théorie les éclaire ? On s'aperçoit dans les trois cas que la théorie étend le regard de l'esprit à des régions au départ obscures : soit obscures pour les sens (on ne pouvait comparer ni à l'œil, ni au toucher les épaisseurs des deux papiers), soit obscures pour l'esprit lui-même lorsqu'il s'embarrasse dans la quantité des cas de figures ou d'équations. La puissance de penser s'accroît soudain, ce qui est peut-être la source principale de la stimulation intellectuelle.

4 - Du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir ?

Les trois *types idéaux* que nous venons d'examiner, joints à la distinction du *sens étroit* et du *sens large*, peuvent nous aider à discuter la question posée dans le titre de cet exposé : « de savoir à l'élève ou de l'élève au savoir ?, une question de sens ». Reprenons-les un à un dans cette perspective.

Le tableau de Treffers, dans sa concision, pourrait suggérer les formules suivantes : L'enseignement empiriste à l'état pur est centré sur l'élève et ses activités, plus que sur les mathématiques. Il ne va ni du savoir à l'élève, ni de l'élève au savoir, il va si on peut dire de l'élève à l'élève. L'enseignement structuraliste à l'état pur est centré sur les mathématiques plus que sur l'élève : il va du savoir au savoir. L'enseignement mécanique a l'état pur va de rien à rien. Enfin l'enseignement réaliste pur va de l'élève au savoir.

Arrêtons-nous un instant pour montrer à quel point ces formules sont trompeuses par leur laconisme. En effet, elles donnent à penser qu'il y aurait au départ l'élève sans savoir, et ensuite l'élève accédant au savoir. Tel n'est pas le cas. Les élèves, quel que soit leur âge, possèdent un savoir, et ce savoir fonctionne. Aussi, vaudrait-il mieux remplacer la formule *de l'élève à l'élève* par *du savoir de l'élève au savoir de l'élève*, en entendant par cette expression le savoir non négligeable, quoique peu mathématisé, que l'élève acquiert dans des contextes variés.

La formule *du savoir au savoir* correspondant à l'enseignement structuraliste, devrait être aussi précisée de la même façon : *du savoir mathématique au savoir mathématique*. Au mieux, elle renvoie à l'acquisition par l'élève de théories mathématiques dont il perçoit mal le lien avec leurs contextes naturels, même s'il peut se trouver à l'aide dans ces théories et les manier sans trop de peine « en circuit fermé ». Dans ce cas, il faudrait même préciser *du savoir mathématique du professeur au savoir mathématique de l'élève*. C'est ainsi que les choses se passent pour beaucoup de nos étudiants de licence ou de maîtrise. Au pire, cette formule renvoie au discours magistral non compris par l'élève, le professeur navigant seul dans le savoir mathématique : on devrait dire alors *du savoir mathématique à rien*.

Que l'enseignement mécanique aille *de rien à rien* est sans doute, des quatre formules, la seule qui soit vraiment claire. Elle montre par contraste que les enseignements empiriste et structuraliste ne sont pas négligeables, le premier toutefois profitant à plus d'élèves que le second, en raison de son moindre pouvoir sélectif.

Enfin, pour parler de l'enseignement réaliste, il faudrait compléter la formule *de l'élève au savoir* en disant *du savoir de l'élève au savoir mathématique*, ou même *au savoir mathématique bien intégré dans la personnalité intellectuelle de l'élève*. Apprendre les mathématiques, c'est d'abord réaliser que certains types de questions exigent d'aménager, restructurer et augmenter une partie du savoir quotidien jusqu'à en faire un corps de doctrine qui s'en détache et s'applique efficacement à ces questions. Et bien entendu, en cours de route, le lot des questions s'enrichit lui aussi et parmi les questions nouvelles, certaines s'écartent de la pensée quotidienne.

Le *triex -exploration, extraction, explications-* nous ramène aussi au problème du sens. Car il s'agit de trois registres de la pensée qui ne sont pas indépendants, mais complémentaires. Quiconque a fait un peu de mathématiques (en prenant le mot dans son plein sens) sait qu'il a, par moments, exploré des champs d'exemples, procédé par essais et erreurs, tenté de voir s'il n'avait oublié aucun cas. Il sait aussi qu'à d'autres moments, il est tombé sur un phénomène étonnant, qu'il s'est demandé ce qui se passait, qu'il a cherché à l'exprimer et que parfois les mots adéquats lui ont manqué, qu'il s'est demandé si ce qu'il exprimait était vrai et s'il devait chercher un contre-exemple ou une preuve. Il sait qu'à d'autres moments encore il a cherché les points de départ et le fil conducteur d'une démonstration, puisqu'il a construit celle-ci patiemment, rarement jusqu'au bout du premier coup, en avançant prudemment et en se reprenant souvent. Il sait enfin que dans sa pratique, ces trois activités n'ont pas été séparées et qu'elles se sont répondu l'une à l'autre. Faire des mathématiques, c'est bien cela. Enseigner les mathématiques, c'est apprendre aux élèves à faire cela. Pour l'apprendre, ils doivent le faire, bien entendu, chacun à son niveau.. Et ce serait sans doute une erreur de croire que les élèves, parce qu'ils sont inexpérimentés, ne peuvent pas atteindre aux trois registres de l'activité mathématique. Comme l'écrit J. HADAMARD [1945], « entre le travail d'un étudiant qui essaie de résoudre un problème de géométrie ou d'algèbre et un travail d'invention, on peut dire qu'il n'y a qu'une différence de niveau, de degré, les deux travaux étant d'une nature analogue ».

Alors, faut-il aller *du savoir à l'élève* ou bien l'inverse ? La question paraît truquée, du fait qu'elle centre l'attention sur le savoir, et donc sur un corps de doctrine. Le triex ramène l'attention sur les mathématiques comme activité, comme travail. Personne n'apprend les mathématiques comme connaissances toutes faites. Chacun doit les *reconstruire* pour soi, et en ce sens, la seule possibilité est d'aller vers le savoir à travers sa propre activité. Une façon d'y arriver, c'est de faire tout de suite des mathématiques, élémentaires certes au début, à tout moment au niveau où l'on se trouve. Les mathématiques sont une science et une pratique : on accède très progressivement à cette science en se plongeant tout de suite dans cette pratique, sans la tronquer d'aucun de ses trois registres essentiels.

Notre troisième *type idéal* distinguait *illustration* et *application*. Il nous ramène lui aussi à la même question : *du savoir à l'élève ou de l'élève au savoir* ? Si la formule *du savoir à l'élève* veut dire : on expose la théorie le plus simplement et le plus clairement possible, puis on l'illustre pour la faire mieux comprendre, on s'aperçoit que l'élève n'est présent dans le schéma que comme une sorte de récepteur de connaissance. S'il est vrai, comme nous venons de le dire, qu'il doit reconstruire pour lui-même les mathématiques (avec l'aide nécessaire du professeur), c'est sur le terrain des applications, c'est-à-dire *des questions non triviales* qu'il pourra le faire. Le terme *application* n'est à cet égard pas le meilleur, car il donne à entendre qu'on résout les questions non triviales à l'aide d'une théorie apprise *préalablement*, et que l'on *appliquerait*. Tel n'est pas le cas. Les questions non triviales sont celles qui suscitent la construction théorique. Il faut donc que l'élève se les pose d'abord, et c'est ainsi que la formule *de l'élève au savoir* prend un sens assez clair. Une application, avons-nous dit, est une situation que la théorie aide à comprendre. On pourrait nuancer en disant : une application est une situation qui pose problème, au point de provoquer pour sa solution une construction théorique adéquate. Mais s'exprimer ainsi reviendrait à éloigner un peu trop le terme *application* de son acception commune. Il est sans doute plus clair de dire *apprendre par situations-problèmes* que *apprendre à partir des* *applications.*

Par ailleurs, la distinction illustration-application nous conduit à mieux cerner ce qui est stimulant dans le sens et dont il ne faut priver personne. Les illustrations par nature aident à comprendre la théorie, mais nous apprennent peu de neuf. Elles ne comportent pas de défi, elles ne sont pas intrigantes.

Passons en revue nos divers exemples de *situations problématiques* et essayons d'analyser ce qui en fait l'intérêt. Ces questions avaient trait à des objets familiers, ou à tout le moins simples. Vérifions cela en les reparcourant :

– Quels types de quadrilatère obtient-on en croisant deux bandes ?

– D'où voit-on un segment de droite sous un angle droit ?

– Comment se fait-il que deux symétries orthogonales enchaînées donnent une translation ? De quelle translation s'agit-il ?

– Comment exprimer le lien entre les coordonnées de points d'une droite dessinée dans un repère ?

Mais ces questions formulées simplement amènent à considérer les objets sous un jour inattendu et intrigant, qui mobilise la réflexion. Il y a là une effet de ce que Bertold Brecht appelle la *distanciation*. Voyons de quoi il s'agit, en acceptant de faire un petit détour par le monde du théâtre.

Brecht donne pour fonction au théâtre de représenter les situations les plus communes de la vie, mais de telle sorte que le spectateur, les considérant *à distance*, les perçoive sous un jour nouveau, plus profond qu'à l'ordinaire. C'est dans les sciences, auxquelles il s'intéressait beaucoup, qu'il avait vu d'abord à l'œuvre un certain effet de distanciation, et il voulait le transposer au théâtre. Il écrit : « C'est ce que font, depuis longtemps, les hommes de science quand ils observent et amènent à observer de tels phénomènes (les oscillations des pendules, les mouvements des atomes, le métabolisme des infusoires dans une goutte d'eau, etc...). Pour comprendre une chose, ils font comme s'ils ne la comprenaient pas ; pour découvrir une loi, ils mettent les processus en contradiction avec l'idée traditionnelle qu'on se fait d'eux ; de la sorte ils font ressortir le caractère inouï et particulier du phénomène étudié. Ainsi, certaines évidences ne se comprennent plus d'elles-mêmes, ce qui, à dire vrai, a pour effet de les faire véritablement comprendre [...]. Ce qui va de soi, c'est-à-dire la forme particulière qu'a prise dans notre conscience l'expérience quotidienne, s'abolit lorsque son évidence est niée par l'effet de distanciation et transformée ensuite en une nouvelle compréhension ».

Cette situation est reprise d'un ouvrage de Henri Bassis[6] [1984]. Elle peut nous aider à trouver, pour nous-mêmes et pour nos élèves, cette chose irremplaçable, porteuse de tant de conséquences individuelles et sociales, qu'est le plaisir du sens.

Remerciements : cet exposé a été complété grâce aux observations de Thérèse GILBERT et de Christiane HAUCHART. Qu'elles ne soient toutes deux amicalement remerciées.

BIBLIOGRAPHIE

R. ARON [1948], *Introduction à la philosophie de l'histoire, essai sur les limites de l'objectivité historique*, Gallimard, Paris.
H. BASSIS [1984], *Je cherche donc j'apprends*, Éditions Sociales, Paris.

[6]H. Bassis, pendant longtemps animateur principal du Groupe Français d'Éducation Nouvelle.

R. BKOUCHE, B. CHARLOT, N. ROUCHE [1991], *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, A. Collin, Paris.
P. BOURDIEU, J.-C. CHAMBOREDON, J.-C. PASSERON [1968], *Le métier de sociologue, préalable épistémologiques*, Mouton, Berlin, 4ème éd. 1983.
H. FREUDENTHAL [1991], *Revisting mathematics education, the China lectures*, Kluwer, Dordrecht.
N. FUSTEL DE COULANGES [1864], *La cité antique*, Hachette, Paris, 11ème édition, 1885.
Jacques HADAMARD [1945], *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, tard. Jacqueline Hadamard, Gauthiers-Villars, Paris, rééd. 1959.
P.-J. HILTON [1973], *Le langage des catégories*, trad. J.-C. Matthys, CEDIC, Paris.
S.K. STEIN [1987], Gresham's law : Algorithm drives out thought, *For te learning of mathematic 7, 2-4.*
M. WEBER [1951], *Essai sur la théorie de la science*, trad. J. Freund, Plon, Paris, rééd. 1992.