EUCLIDE: Éléments, *livre 1, Notions communes, v. 300 av. J.-C.*

Définitions

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d’une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d’une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
8. Un angle plan est l’inclinaison mutuelle de deux lignes qui. se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l’angle se nomme rectiligne.
10. Lorsqu’une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. L’angle obtus est celui qui est plus grand qu’un droit.
12. L’angle aigu est celui qui est plus petit qu’un droit.
13. On appelle limite ce qui est l’extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu’on nomme circonférence; toutes les droites, menées à la circonférence d’un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
16. Ce point se nommé le centre du cercle. [...]

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celui qui a ses trois côtés égaux. [...]

35. Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan et étant prolongées à l’infini de part et d’autre, ne se rencontrent ni d’un côté ni de l’autre.

Demandes

1. Conduire une droite d’un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D’un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l’infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

Notions communes

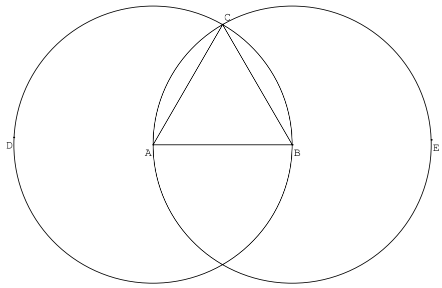
1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Si à des choses égales, on ajoute des choses égales, les touts seront .égaux.
3. Si à des choses égales, on retranche des choses égales, les restes seront égaux.
4. Si à des choses inégales, on ajoute des choses égales, les touts seront inégaux.
5. Si à des choses inégales, on retranche des choses égales, les restes seront inégaux.
6. Les choses, qui sont doubles d’une même chose, sont égales entre elles.
7. Les choses, qui sont les moitiés d’une même chose, Sont égales entre elles.
8. Les choses, qui s’adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

EUCLIDE: premières propositions.

Suivant l'usage, on note entre parenthèses dans le texte euclidien les références aux propositions, définitions, demandes et notions communes.

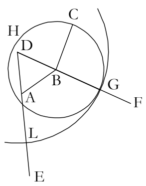
Proposition 1. *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.*

Exposition. Soit *AB* une droite donnée et finie.
Détermination. Il faut construire sur la droite finie *AB* un triangle équilatéral.
Construction. Du centre *A* et de l'intervalle *AB,* décrivons la circonférence *BCD* (dem. 3); et de plus, du centre *B* et de l'intervalle *BA,* décrivons la circonférence *ACE;* et du point *C,* où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points *A, B* les droites *CA, CB* (dem. 1).



Démonstration. Car, puisque le point *A* est le centre du cercle *BCD,* la droite *AC* est égale à la droite *AB* (déf. 15); de plus, puisque le point *B* est le centre du cercle *ACE,* la droite *BC* est égale à la droite *BA;* mais on a démontré que la droite *CA* était égale à la droite *AB;* donc chacune des droites *CA, CB* est égale à la droite *AB;* or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite *CA* est égale à la droite *CB;* donc les trois droites *CA, AB, BC* sont égales entre elles.
Conclusion. Donc le triangle *ABC* (déf. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie *AB.* Ce qu'il fallait faire. *[...]*

Prop. 2. — A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.



Soit A le point donné, et BC la droite donnée **;** il faut placer au point A une droite égale à la droite donnée BC.

Menons du point A au point B la droite AB. Sur cette droite construisons le triangle équilatéral D A B. Menons les droites A E, B F dans la direction D A, D B. Du centre B, et avec l'intervalle B C, décrivons le cercle C G H. De plus, du centre D et avec l'intervalle D G, décrivons le cercle G K L.

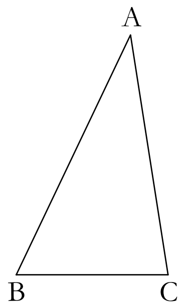
Puisque le point B est le centre du cercle C G H, B C est égal à B G.
De plus, puisque D est le centre du cercle G K L, D L est égal à D G.
Mais D A est égal à D B. Donc le reste A L est égal au reste B G.
Mais on a démontré que B C est égal à B G. Donc chacune des droites A L, B C est égale à B G, et les choses égales à une même sont égales entre elles. Donc A L est égal à B C.

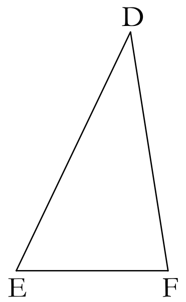
Donc, au point donné A, on a placé une droite A L égale à la droite donnée B C. Ce qu'il fallait faire.

Prop.3. — Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Prop. 4. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

La démonstration se fait, comme de nos jours dans les ouvrages élémentaires, par transport et en constatant la congruence:





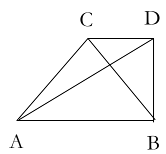
Soient les deux triangles *ABC, DEF;* que ces deux triangles aient les deux côtés *AB, AC* égaux aux deux côtés *DE, DF,* chacun à chacun, le côté *AB* égal au côté *DE,* et le côté *AC* au côté *DE,* et qu'ils aient aussi l'angle *BAC* égal à l'angle *EDF;* je dis que la base *BC* est égale à la base *EF,* que le triangle *ABC* est égal au triangle *DEF* et que les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; l'angle *ABC* égal à l'angle *DEF,* et l'angle *ACB* égal à l'angle *DFE.*

Car le triangle *ABC* étant appliqué sur le triangle *DEF,* le point *A* étant posé sur le point *D,* et la droite *AB* sur la droite *DE,* le point *B* s'appliquera sur le point *E,* parce que *AB* est égal à *DE;* mais *AB* étant appliqué sur *DE,* 1a droite *AC* s'appliquera sur *DE,* parce que l'angle *BAC* est égal à l'angle *EDF;* donc le point *C* s'appliquera sur le point F, parce que *AC* est égal à *DE;* mais le point *B* s'applique sur le point *E;* donc la base *BC* s'appliquera sur la base *EF;* car si le point *B* s'appliquant sur le point *E,* et le point *C* sur le point *E,* la base *BC* ne s'appliquait pas sur la base *EF,* deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dém. 6); donc la base *BC* s'appliquera sur la base *EF,* et lui sera égale; donc le triangle entier *ABC* s'appliquera sur le triangle entier *DEF,* et lui sera égal; et les angles restants s'appliqueront sur les angles restants, et leur seront égaux, l'angle *ABC* à l'angle *DEF,* et l'angle *ACB* à l'angle *DFE.*

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

Prop 5 et 6. — Egalité des angles à la base d'un triangle isocèle et réciproque.

Prop. 7. — Sur une même droite, et à deux points différents placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.



Car, si possible, deux droites A C, C B étant données, construites sur la droite A B et se rencontrant au point C, soient construites deux autres droites A D, D B sur la même droite A B, du même côté, se rencontrant eu un autre point D et respectivement égales aux précédentes, précisément chacune à celle qui a la même extrémité qu'elle, de telle sorte que C A égale A D qui a la même extrémité A, et C B, D B qui a la même extrémité B. Soient joints C D.

Alors, puisque A C est égal à A D, l'angle A C D est aussi égal à l'angle A D C; donc l'angle A D C est plus grand que l'angle D CB, et par suite l'angle C D B est beaucoup plus grand que l'angle D C B.

D'autre part, puisque C B est égal à D B, l'angle C D B est aussi égal à l'angle D C B. Mais il a été prouvé beaucoup plus grand que lui ce qui est impossible. Donc, etc...

Prop. 8. — Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, et s'ils ont la base égaIe à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

Par transport de l'un des triangles on réalise la coïncidence des bases, puis on applique le théorème précédent.