Baccalauréat Pondichéry mars 1967
série mathématiques élémentaires

I.

1. Étudier les variations de la fonction qui au nombre réel X, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, associe le nombre Y :

$$Y = \frac{X^2}{X^2 - 3X + 2}$$

Tracer le graphique représentatif, (C), dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Soit l'équation

$$(1-m)\cos 2x - 6m\sin x + 5m - 1 = 0,$$

dans laquelle m désigne un paramètre et x l'inconnue.

   a. En utilisant le graphe (C) déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles l'équation admet des racines, dont deux seulement, x' et x'', sont comprises entre 0 et π $(0 < x' < x'' < \pi)$.

   b. Retrouver les résultats de cette discussion, sans utiliser le graphe (C).

II.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux droites suivantes :

— la droite (D) d'équations $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = z$,

— la droite $\left(D'\right)$ d'équations $\dfrac{x}{5} = 3 - y = -z$:

1. Déterminer les composantes d'un vecteur perpendiculaire à D et à $\left(D'\right)$.
2. En déduire l'équation du plan passant par O et parallèle à D et à $\left(D'\right)$.

III.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ on considère la famille des cercles (Γ) tangents à $x'\mathrm{O}x$ et orthogonaux au cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - 4ay = 0$.

1. Montrer, en utilisant une inversion convenablement choisie, que les cercles (Γ) sont tangents à un cercle fixe.
2. Montrer que les cercles (γ), inverses des cercles (Γ) dans l'inversion de centre O et de puissance $4a^2$, sont des cercles de rayon a.

   En déduire l'enveloppe des polaires du point O par rapport aux cercles (Γ).

3. On appelle (ω) le centre d'un cercle (γ) et I son point de contact avec $x'\text{O}x$.

On pose $\overline{\text{OI}} = \lambda$. Un point M de (γ) est repéré par l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\omega M},\ \overrightarrow{\omega I}\right) = t$, modulo 2π.

Exprimer les coordonnées, x et y, de M en fonction de λ et de t.

4. On suppose que le paramètre t représente le temps et que λ varie en fonction du temps suivant la loi $\lambda = at$.

Déterminer le vecteur vitesse, $\overrightarrow{MV}$, et le vecteur accélération, $\overrightarrow{MI}$, du point M à l'instant t.

Comparer les directions des vecteurs $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{MI}$ à un même instant.

Préciser les positions du point M et construire ces vecteurs aux temps

$$t = 0, \qquad t = \frac{\pi}{2}, \qquad t = \frac{3\pi}{2}, \qquad t = 2\pi.$$