

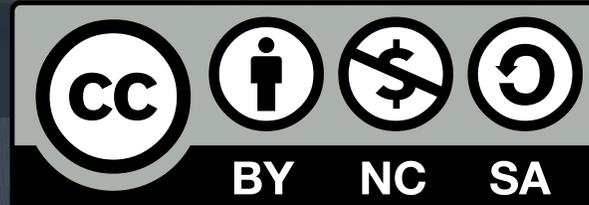
Ambiguïtés, abus de langage, implicites, ...

Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique

Vincent DEGAUQUIER
Samuël DI EMIDIO



Ce document est mis à votre disposition
sous licence Creative Commons BY-NC-SA

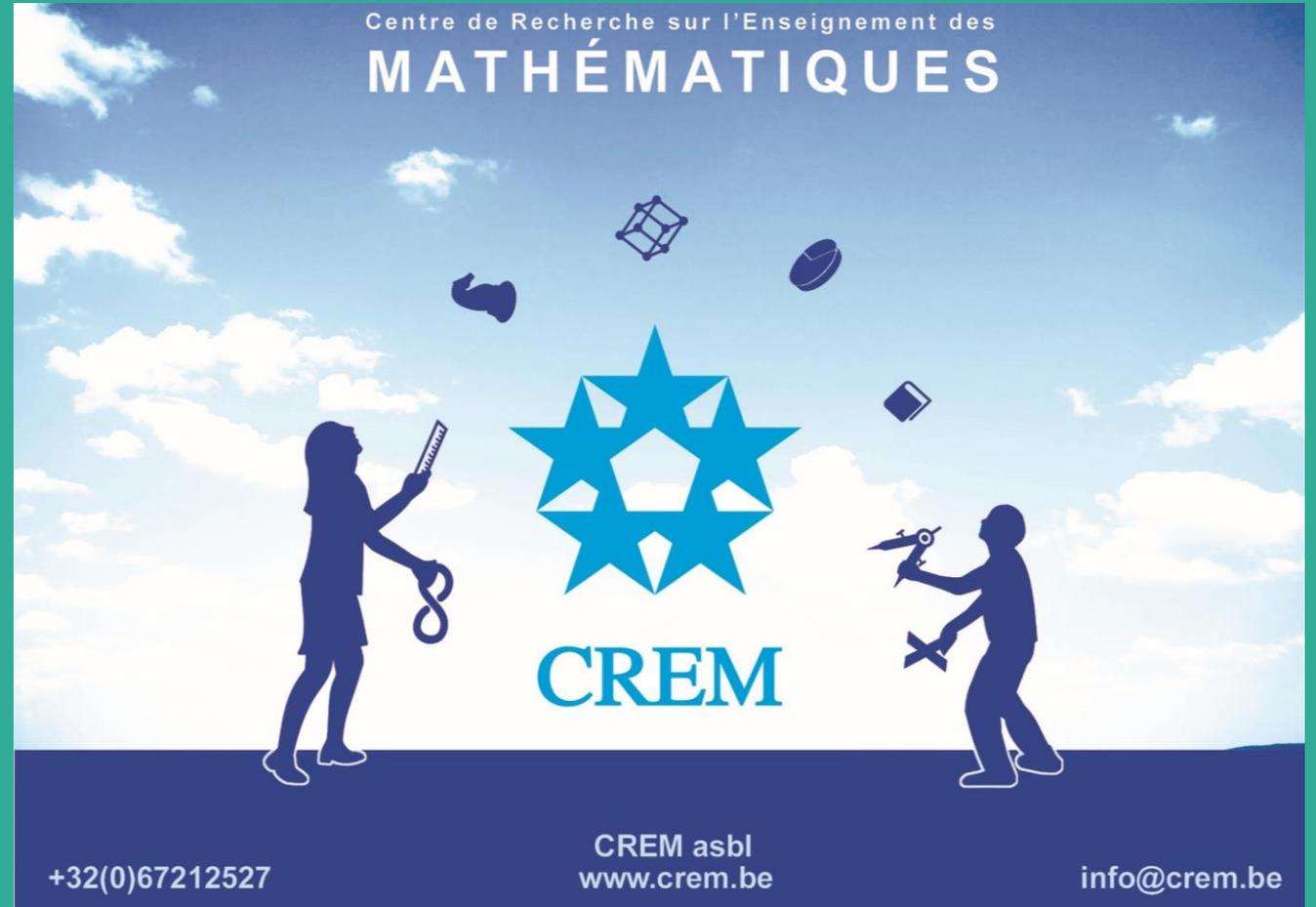


Vous êtes autorisé à le partager et l'adapter selon les modalités de cette licence : attribution, pas d'utilisation commerciale, partage dans les mêmes conditions ; détaillées [sur le site des Creative Commons](#).

Vincent DEGAUQUIER
Samuël DI EMIDIO

Le CREM

RECHERCHES
PUBLICATIONS
LOGICIELS
FORMATIONS
BIBLIOTHÈQUE

A promotional graphic for the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM). The background is a blue sky with white clouds. In the center is the CREM logo, a blue star-like shape composed of smaller stars, with the word 'CREM' in blue capital letters below it. Two silhouettes of people are shown: one on the left holding a ruler and a string, and one on the right holding a telescope. Various mathematical symbols and objects are scattered around the logo, including a cube, a sphere, a book, and a pair of glasses. At the top, the text 'Centre de Recherche sur l'Enseignement des MATHÉMATIQUES' is written in white. At the bottom, contact information is provided in white text on a dark blue background.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des
MATHÉMATIQUES

CREM

+32(0)67212527

CREM asbl
www.crem.be

info@crem.be

Le projet LOGLANG

Analyse de la langue



Production d'articles



Diffusion

Loglang

 loglang.crem.be

 @ProjetLoglang

 ProjetLoglang

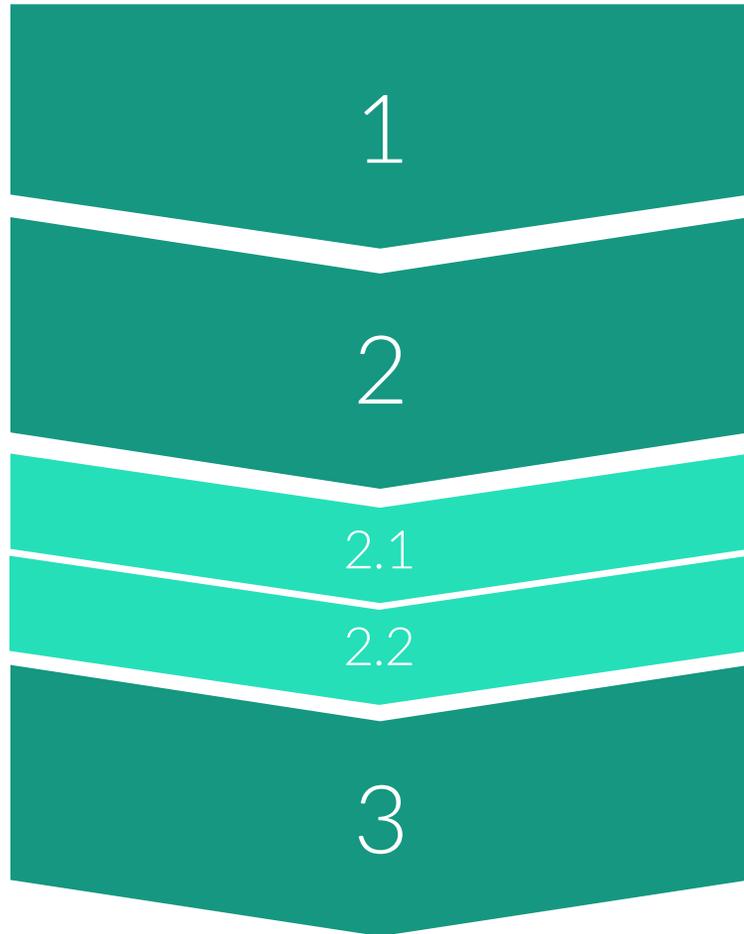
Bao DANG

Vincent DEGAUQUIER

Samuël DI EMIDIO

À propos de cette conférence...

À propos cette conférence...



LANGUE MATHÉMATIQUE

OPACITÉ DE LA STRUCTURE LOGIQUE

Expressions logiques

Catégories logiques

CONCLUSION

Langue mathématique

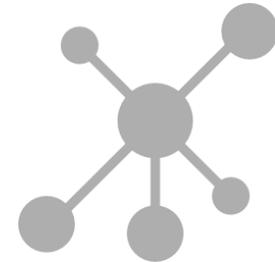
Langue mathématique



Langue
française



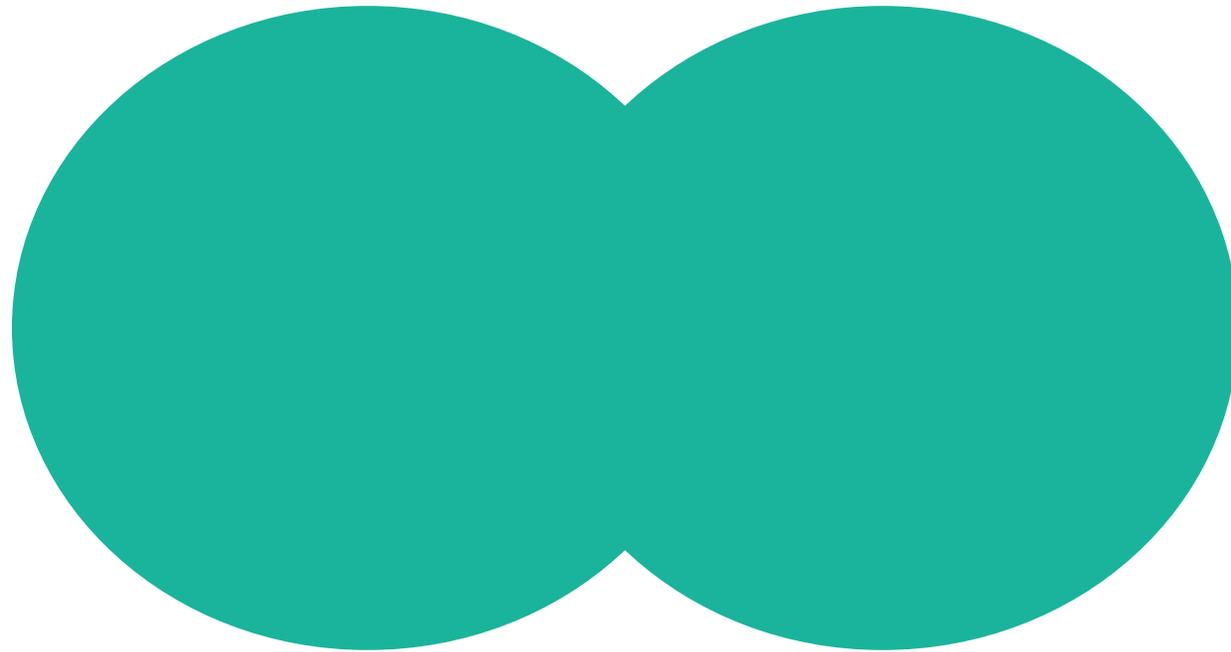
Alphabet



Syntaxe

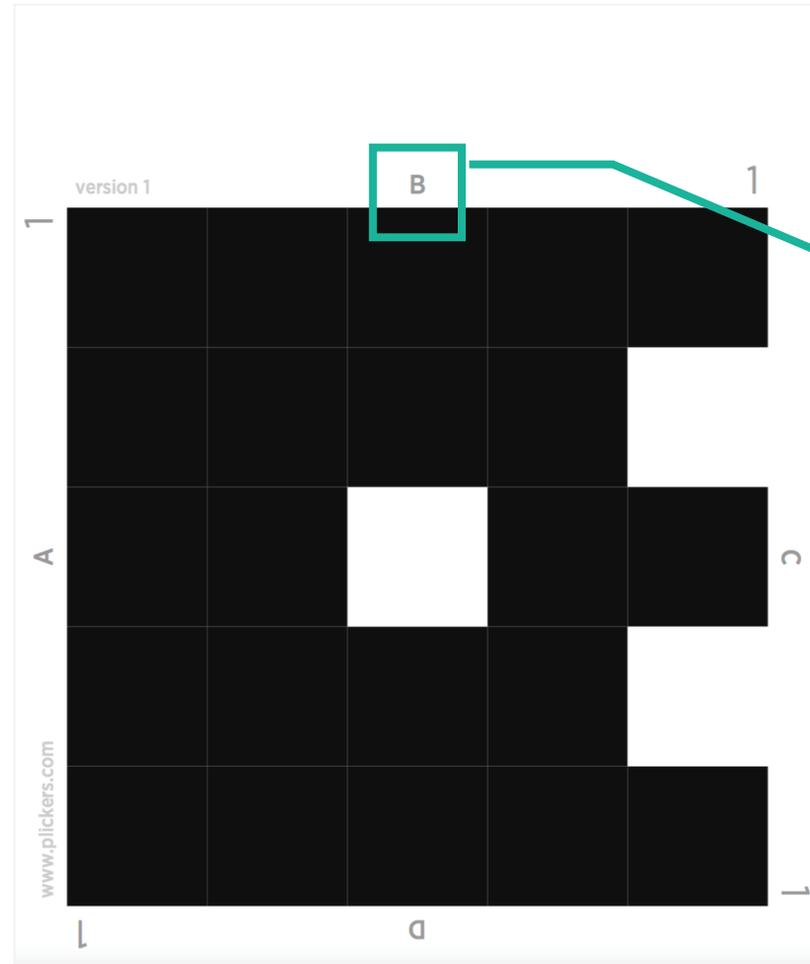
Source des difficultés

Langue
naturelle



Langue
symbolique

Exemples



Votre
réponse
vers le haut

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

- A. « Les multiples de 9 sont multiples de 3 et les multiples de 12 sont multiples de 3. »
- B. « Les multiples communs à 9 et à 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

- A. « Les multiples de 3 sont multiples de 12 et les multiples de 4 sont multiples de 12. »
- B. « Les multiples communs à 3 et à 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

« Les multiples de 9 et de 12 sont multiples de 3. »

A. multiples de chacun ✓

B. multiples communs ✓

« Les multiples de 3 et de 4 sont multiples de 12. »

A. multiples de chacun ✗

B. multiples communs ✓

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- A. Vrai
- B. Faux
- C. Ça dépend

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

- A. Vrai
- B. Faux
- C. Ça dépend

$$3a+7=32$$

$$3a+7=32$$

- A. Vrai
- B. Faux
- C. Ça dépend

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vrai $\forall a$ et $\forall b$

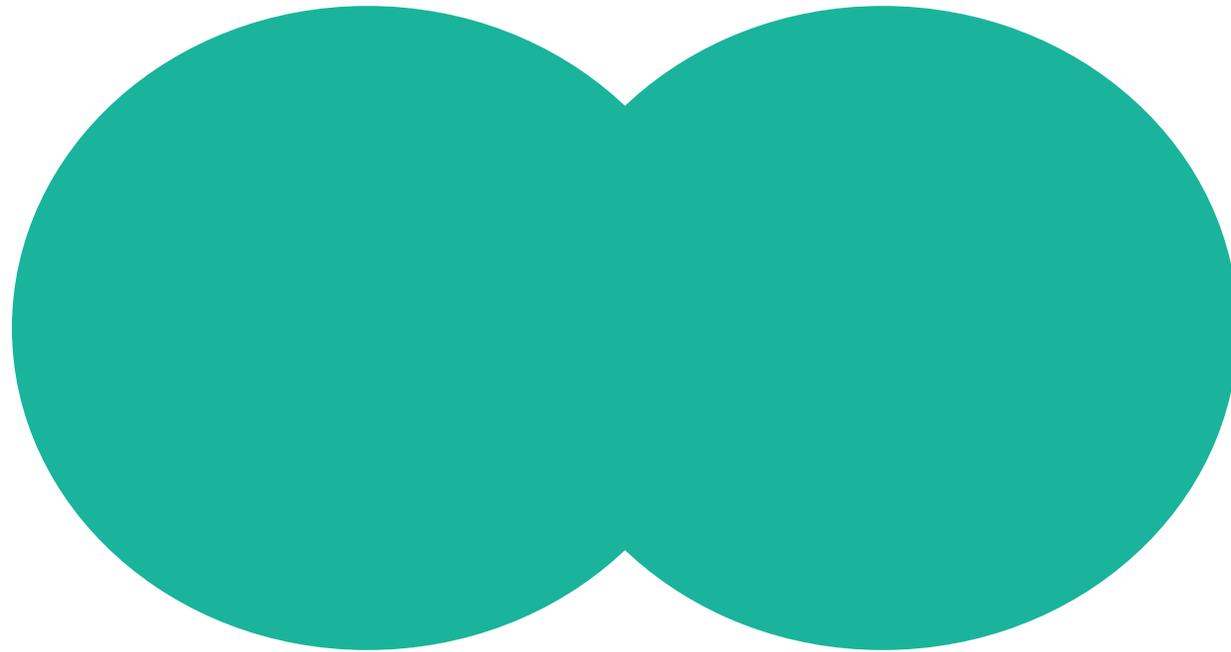
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$3a + 7 = 32$$

Vrai pour certaines
valeurs de a et de b

Source des difficultés

Langue
naturelle



Langue
symbolique

Opacité de la structure logique

Faire des mathématiques, c'est faire des raisonnements.

Les démonstrations, mais pas seulement...

La correction d'un raisonnement repose sur la structure logique des expressions qui le composent.

Tout homme est mortel.
Socrate est un homme.

Socrate est mortel.

Tout cheval est véloce.
Bucéphale est un cheval.

Bucéphale est véloce.

Problème

La structure logique des expressions de la langue mathématique n'est pas toujours facilement identifiable.

Expressions logiques

Catégories logiques

Opacité de la structure logique

Expressions logiques

	Langue logique	Langue française
Négation	\neg	ne... pas
Conjonction	\wedge	et
Disjonction	\vee	ou
Implication	\rightarrow	si... alors
Équivalence	\leftrightarrow	si et seulement si
Q. universel	\forall	tout
Q. existentiel	\exists	quelque



NÉGATION : Signification logique

A combiné à \neg produit $\neg A$

$\neg A$ est vrai ssi A n'est pas vrai



NÉGATION : Décalage entre « \neg » et « ne... pas »

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français. »

- A. « Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
- B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »





NÉGATION : Décalage entre « \neg » et « ne... pas »

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »

B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »





NÉGATION : Décalage entre « \neg » et « ne... pas »

« Tous les textes de Leibniz sont écrits en français. »

- A. « Tous les textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »
- B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »





NÉGATION : Décalage entre « \neg » et « ne... pas »

« Tous les textes de Leibniz sont écrits en français. »

A. « Tous les textes de Leibniz ne sont pas écrits en français. »

B. « Aucun texte de Leibniz n'est écrit en français. »

\wedge

CONJUNCTION : Signification logique

A et B combinés à \wedge produisent $(A \wedge B)$

$(A \wedge B)$ est vrai ssi A est vrai et B est vrai



CONJONCTION : Décalage entre « Λ » et « et »

« Gottfried est tombé et s'est brisé le crâne. »

« Gottfried s'est brisé le crâne et est tombé. »

v

DISJONCTION : Signification logique

A et B combinés à v produisent $(A \vee B)$

$(A \vee B)$ est vrai ssi A est vrai ou B est vrai

V

DISJONCTION : Décalage entre « V » et « ou »

« Le menu comprend un café ou un dessert. »



IMPLICATION : Signification logique

A et B combinés à \rightarrow produisent $(A \rightarrow B)$

$(A \rightarrow B)$ est vrai ssi A n'est pas vrai ou B est vrai



IMPLICATION : Décalage entre « \rightarrow » et « si... alors »

« Si tu termines ta soupe, tu auras un dessert. »

Gottfried ne termine pas sa soupe et a un dessert.

« Si tu ne termines pas ta soupe, tu n'auras pas de dessert. »

Gottfried termine sa soupe et n'a pas de dessert.



Q. UNIVERSEL : Signification logique

$A(\alpha)$ combiné à $\forall\alpha$ produit $\forall\alpha A(\alpha)$

$\forall\alpha A(\alpha)$ est vrai ssi

$A(\alpha)$ est vrai pour toute valeur de α



Q. UNIVERSEL : Décalage entre « \forall » et « tout »

« Tous les spectateurs ont apprécié la pièce. »

« Au moins un spectateur a apprécié la pièce. »

Q. EXISTENTIEL : Signification logique

$A(\alpha)$ combiné à $\exists \alpha$ produit $\exists \alpha A(\alpha)$

$\exists \alpha A(\alpha)$ est vrai ssi
 $A(\alpha)$ est vrai pour au moins une valeur de α

Q. EXISTENTIEL : Décalage entre « \exists » et « quelque »

« Certains textes de Leibniz sont écrits en français »

« Certains textes de Leibniz ne sont pas écrits en français »

Opacité de la structure logique

Expressions logiques

Décalage entre la signification des connecteurs logiques et celle des expressions logiques.

Opacité de la structure logique

Catégories logiques

Comment classer les symboles mathématiques ?

$-$	$<$	$\sqrt{\quad}$	a dans $a^2 - b^2$
3	\neq	x dans $3x + 1 = 5$	\geq
$\int \dots dx$	π	\Rightarrow	S dans $A' = s_0(A)$
\times	$=$	0	\wedge
Σ	\exists	e	\Leftrightarrow
L dans $A = l \times L$	\in	\forall	$//$

01 Symboles fonctionnels $\times - s_{\text{dans } A' = s_0(A)} \sqrt{\int \dots dx} \Sigma$

02 Symboles prédicatifs $< \neq = \in // \geq$

03 Symboles logiques $\wedge \Rightarrow \exists \forall \Leftrightarrow$

04 Constantes $3 0 \pi e$

05 Variables $L_{\text{dans } A = l \times L} a_{\text{dans } a^2 - b^2} x_{\text{dans } 3x + 1 = 5}$

01 Symboles fonctionnels

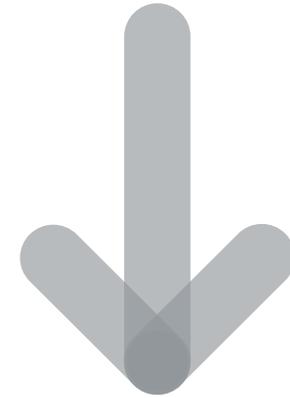
02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

**Catégories
logiques**



Aあ

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« le produit matriciel
de A et de B »

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« x est égal à 8 »

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« 5 est un nombre premier »

01 Symboles fonctionnels

02 Symboles prédicatifs

03 Symboles logiques

04 Constantes

05 Variables

« **si** une fonction est dérivable,
alors elle est continue »

Difficultés didactiques

Symbole fonctionnel

?

$$3 - 7$$

$$-7$$

$$x - a$$

$$-a$$

$$(a - b)^2$$

$$-\frac{x}{2}$$

binaire

unaire

Difficultés didactiques

MOINS DE
SOUSTRACTION



Symbole fonctionnel

binaire

MOINS DE
SYMÉTRIE



Symbole fonctionnel

unaire

MOINS
« ENTIER NÉGATIF »



Constante

Difficultés didactiques

$$6 - x = 9$$

$$\Leftrightarrow -x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Difficultés didactiques

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Difficultés didactiques

Un même symbole est parfois utilisé pour faire référence à des concepts différents.

POLYSÉMIE

01 Symboles fonctionnels $\times - s_{\text{dans } A' = s_0(A)} \sqrt{\int \dots dx} \Sigma$

02 Symboles prédicatifs $< \neq = \in // \geq$

03 Symboles logiques $\wedge \Rightarrow \exists \forall \Leftrightarrow$

04 Constantes $3 0 \pi e$

05 Variables $L_{\text{dans } A = l \times L} a_{\text{dans } a^2 - b^2} x_{\text{dans } 3x + 1 = 5}$

Difficultés didactiques

$$7 - 3 =$$

$$4 \times 5 =$$

$$24 : 6 =$$

$$a(a - b) =$$

« do something signal »

Difficultés didactiques

$$7 - 3 = 4$$

4

« $7 - 3$ » et « 4 »
sont deux expressions
qui désignent
le même concept

Difficultés didactiques

$$\frac{99}{77} \quad \text{---} \quad 9 \times 11$$

$$8 \times 99 \quad \text{---} \quad (100 - 1)$$

Les représentations aident à **manipuler** et **appréhender** les concepts

Difficultés didactiques

Des obstacles peuvent naître de l'attribution à un symbole du mauvais rôle.

ERREUR DE CATÉGORISATION

Opacité de la structure logique

Catégories logiques

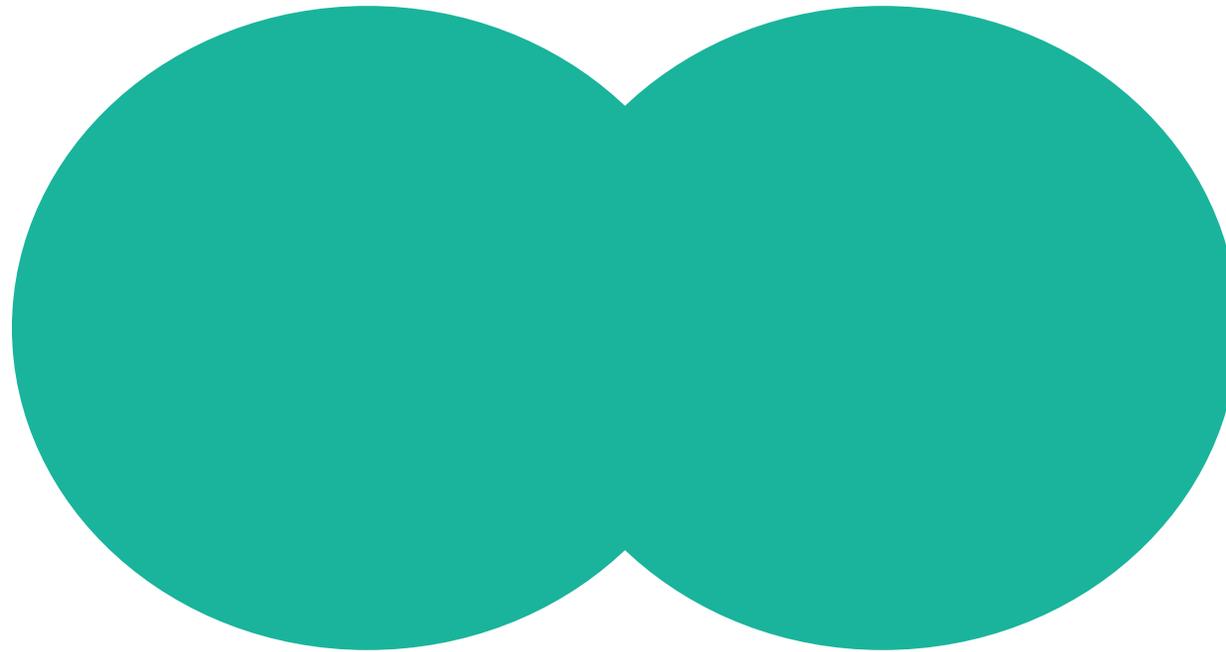
Un même symbole est parfois utilisé pour faire référence à des concepts différents.

Des obstacles peuvent naître de l'attribution à un symbole du mauvais rôle.

Conclusion

Langue mathématique

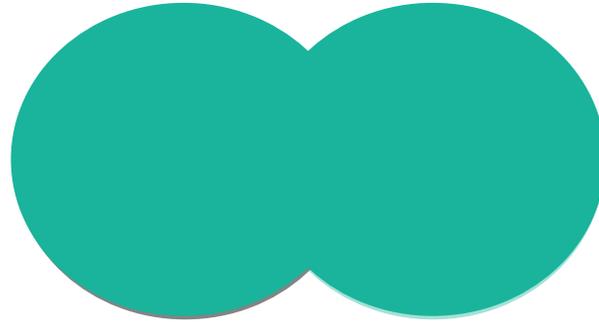
Langue
naturelle



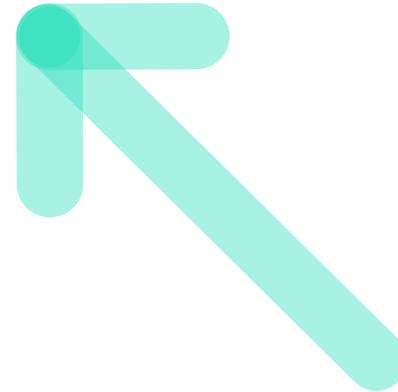
Langue
symbolique

Langue mathématique

Langue
naturelle



Langue
symbolique



Expressions logiques

- Signification
- Décalage

Catégories logiques

- Polysémie
- Catégorisation

Concepts mathématiques



Langue mathématique

Concepts mathématiques



Langue mathématique

Ambiguïtés, abus de langage, implicites, ...

Analyse logique de la langue mathématique dans une perspective didactique

 loglang.crem.be
 @ProjetLoglang
 ProjetLoglang

Vincent DEGAUQUIER
Samuël DI EMIDIO



Références

Bouvier A., George M. et Le Lionnais F. *Dictionnaire des mathématiques* (4e édition). Presses Universitaires de France. 1993.

Duval R. *Écarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 1 : 7–25. 1988.

Duval R. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5 : 37–65. 1993.

Kieran C. *Concepts associated with the equality symbol*. Educational Studies in Mathematics, 12(3) : 317–326. 1981.

Knuth E. J., Stephens A. C., McNeil N. M. et Alibali M. W. *Does understanding the equal sign matter ? evidence from solving equations*. Journal for Research in Mathematics Education, 37(4). 2006.

Lamb L., Bishop J., Philipp R., Schappelle B., Whitacre I., and Lewis M., *Developing symbol sense for the minus sign*, Mathematics Teaching in the Middle School 18 (2012), no. 1, 5–9.

Vlassis J. *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'*, Learning and Instruction 14 (2004), no. 5, 469–484

Vlassis J. *The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization : The case of the minus sign*, Philosophical Psychology 21 (2008), no. 4, 555–570.