

# Algorithme de Gale-Shelley

Le problème posé consiste à apparier deux groupes dans des paires un à un de manière satisfaisante.

Que veut dire satisfaisant ici ?

Quels sont les critères de choix ?

Appariez les candidats aux entreprises d'une manière qui vous semble satisfaisante (et qu'il faudra justifier!)

# Algorithme de Gale-Shapley

Que penser de l'appariement suivant ?

- Alpha – Basile
- Beta – Alice
- Gamma – Claire
- Delta – Elsa
- Epsilon – Dimitri

# Algorithme de Gale-Shapley

Que penser de l'appariement suivant ?

- Alpha – Basile
- Beta – Alice
- Gamma – Claire
- Delta – Elsa
- Epsilon – Dimitri

L'entreprise Delta préfère le candidat Basile à Elsa, et Basile préfère cette entreprise Delta à l'entreprise Alpha : il y a une déviation profitable pour Delta et Basile, cet appariement n'est donc pas stable.

# Algorithme de Gale-Shapley

L'algorithme proposé par Gale & Shapley dans les années 60 propose une solution stable.

Il consiste à faire proposer par une des 2 parties dans l'ordre de ses préférences, tandis que l'autre partie accepte tant qu'elle ne reçoit pas de meilleure proposition.

Appliquons-le à notre exemple : les entreprises proposent, les candidats disposent.

# Algorithme de Gale-Shapley

Les entreprises proposent, les candidats disposent :

Alpha propose à Basile

Beta propose à Alice

Gamma propose à Claire

Delta propose à Claire

Epsilon propose à Alice

Basile n'a reçu qu'une proposition qu'il accepte temporairement.  
Alice choisit son entreprise préférée entre Beta et Epsilon, donc Beta.  
Claire choisit son entreprise préférée entre Gamma et Delta, donc  
Gamma.

# Algorithme de Gale-Shapley

Les entreprises Delta et Epsilon n'ont pas encore trouvé de candidat et vont donc faire une seconde proposition.

Delta va demander à Basile.

Epsilon va demander à Basile.

Basile avait accepté la proposition de l'entreprise Alpha, mais Epsilon lui plaît davantage. Il va donc lâcher Alpha pour rejoindre Epsilon.

# Algorithme de Gale-Shapley

Les entreprises Delta et Alpha n'ont pas encore trouvé de candidat et vont donc faire une nouvelle proposition.

Delta va demander à Elsa (3<sup>e</sup> choix car les 2 premiers n'ont pas marché).

Alpha va demander à Alice (2<sup>e</sup> choix après s'être faite lâcher par le 1<sup>er</sup>).

Elsa accepte la proposition de l'entreprise Delta car elle n'a pas encore trouvé d'entreprise.

Alice préfère l'entreprise Beta avec laquelle elle est et refuse Alpha.

# Algorithme de Gale-Shapley

Alpha, toujours sans candidat, va maintenant proposer à Claire, mais Claire préfère rester avec Gamma.

Alpha va donc demander à Elsa, qui accepte car elle préfère Alpha que Delta.

C'est maintenant Delta qui n'a plus de candidat et propose à Dimitri, qui accepte puisqu'il n'a pas eu d'autre proposition.

Toutes les entreprises et tous les candidats sont matchés :

Alpha – Elsa

Beta – Alice

Gamma – Claire

Delta – Dimitri

Epsilon – Basile

# Algorithme de Gale-Shapley

Cette méthode donne systématiquement un appariement stable. Si une entreprise préférerait un autre candidat que celui avec lequel elle finit, elle lui aurait déjà proposé avant, et le fait qu'elle ne finisse pas avec signifie que le candidat lui préférerait l'entreprise avec laquelle il finit.

Par contre, un problème autre que celui de la stabilité est celui de l'incitation au mensonge. Dans le cadre où les entreprises proposent aux candidats dans l'ordre de leurs préférences, les entreprises n'ont aucun intérêt à mentir, par contre les candidats pourraient mentir pour rester libres en attendant une meilleure proposition pour eux.

# Algorithme de Gale-Shapley

Le théorème de Roth publié en 1982 prouve qu'il n'existe aucune méthode sans incitation au mensonge donnant un appariement stable.

# Algorithme de Gale-Shapley

L'algorithme de Gale-Shapley n'est pas symétrique entre les 2 parties.  
Que se passe-t-il si ce sont les candidats qui proposent leurs candidatures aux entreprises et les entreprises qui acceptent ou non ?

# Algorithme de Gale-Shapley

L'algorithme de Gale-Shapley n'est pas symétrique entre les 2 parties.

Que se passe-t-il si ce sont les candidats qui proposent leurs candidatures aux entreprises et les entreprises qui acceptent ou non ?

On obtient un nouvel appariement, différent mais toujours stable :

Alice – Gamma

Basile – Epsilon

Claire – Beta

Dimitri – Delta

Elsa – Alpha

# Algorithme de Gale-Shapley

Il existe encore d'autres appariements stables.  
On pourrait les lister.

Que penser des performances des appariements obtenus par l'algorithme de Gale-Shapley, pour les entreprises et pour les candidats ?

# Algorithme de Gale-Shapley

Il existe encore d'autres appariements stables.  
On pourrait les lister.

Que penser des performances des appariements obtenus par l'algorithme de Gale-Shapley, pour les entreprises et pour les candidats ?

Le théorème de Knuth publié en 1976 prouve que quand les entreprises proposent, elles obtiennent le meilleur appariement pour elles, qui est aussi le moins bon pour les candidats, et inversement, l'appariement obtenu quand les candidats proposent est le meilleur pour eux mais le moins bon pour les entreprises.

# Algorithme de Gale-Shapley

Quelles applications dans la vraie vie ?

Dans quel cadre cet algorithme est-il réellement utilisé ?

Quelles sont les conséquences des défauts qu'on vient de voir (incitation au mensonge d'une des parties et appariement de piètre qualité pour celle-ci) ?