Les problèmes de l'A.P.M.E.P.

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la solution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher "de beaux problèmes" ... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

Priorité est naturellement réservée aux énoncés composés par des collègues et au dialogue ouvert entre eux par le jeu des réponses et des solutions qui sont à envoyer à l'adresse suivante :

M.Dominique ROUX
52, cours Gay-Lussac
87000 LIMOGES

(réponses à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P.).

ÉNONCÉS

ÉNONCÉ N°190 Claudine (~~Claude~~ FAGE, Limoges)

Un professeur donne 2 entiers à ses élèves de $4^{\text{ème}}$ et leur dit :"ce sont les longueurs de 2 côtés d'un triangle rectangle. Trouver la longueur du $3^{\text{ème}}$ côté, sachant qu'elle est entière". Ce problème peut-il admettre 2 réponses ?

ÉNONCÉ N°191 (André ANGLÉS, Limoges)

Chaque cercle tangent aux trois côtés d'un triangle donné détermine un triangle : celui dont les sommets sont les points de contact. Les droites d'Euler de ces quatre triangles sont-elles concourantes ?

ÉNONCÉ N°192 (Dominique ROUX, Limoges)

Caractériser les triangles ABC tels que pour tout point M de l'espace, il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont MA, MB, MC.

SOLUTIONS

ÉNONCÉ N° 175 (Jacques LEGRAND, Biarritz)

Soit M un point à l'intérieur d'un triangle ABC, d_A, d_B et d_C ses distances aux côtés. Démontrer : $2\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right) \leq \frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}$.

SOLUTION de René MANZONI (Le Havre)

Soit P, Q, R les projections orthogonales respectives du point M sur les droites (BC), (CA), (AB).

L'inversion de pôle M et de puissance 1 transforme les points A, B, C, P, Q, R en les points A', B', C', P', Q', R' respectivement. Elle transforme aussi le cercle de diamètre [MA] (resp. [MB], resp. [MC]) en la droite Q'A'R' (resp. R'B'P', resp.P'C'Q').

Dans le triangle P'Q'R', le théorème d'Erdös-Mordell (voir *Bulletin* n° 363, page 245) permet d'écrire

$$MP' + MQ' + MR' \geq 2\,(MA' + MB' + MC')$$

d'où

$$\frac{1}{MP}+\frac{1}{MQ}+\frac{1}{MR} \geq 2\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}\right).$$

Autres solutions :

Miguel AMENGUAL COVAS (Cala Figuera, Espagne) ; André ANGLÉS (Limoges) ; Edgar DELPLANCHE (Créteil), Eugène EHRHART (Strasbourg), Jacques LEGRAND (Biarritz), Georges LION (Nouméa), Charles NOTARI (Noë), Raymond RAYNAUD (Digne), James TOUILLET (Partenay).

Compléments :

André ANGLÉS (Limoges) démontre que A, B, C étant les angles d'un triangle, la forme quadratique

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A - 2\,zx\cos B$$

est positive et que $f(x,y,z) = 0$ si et seulement si x, y, z sont proportionnels à sin A, sin B et sin C. En conséquence, la forme

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cancel{\cos}\frac{C}{2} - 2yz\cancel{\cos}\frac{A}{2} - 2\,zx\cancel{\cos}\frac{B}{2}$$ /// Sin

est également positive car $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, sont les angles d'un triangle. Il en déduit le

Théorème 1 :

Soit PQR et ABC deux triangles et M un point à l'intérieur de ABC, on a l'inégalité

$$\frac{2\cos\frac{Q}{2}\cos\frac{R}{2}}{MA} + \frac{2\cos\frac{R}{2}\cos\frac{P}{2}}{MB} + \frac{2\cos\frac{P}{2}\cos\frac{Q}{2}}{MC} \leq \frac{\cos^2\frac{P}{2}}{d_A} + \frac{\cos^2\frac{Q}{2}}{d_B} + \frac{\cos^2\frac{R}{2}}{d_C}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si ABC et PQR sont semblables et si M est le centre du cercle ~~circo~~inscrit du triangle ABC.

Le problème 175 correspond au cas particulier où PQR est équilatéral. Andre ANGLÉS généralise cet énoncé au quadrilatère et démontre :

Théorème 2 :

Soit ABCD un quadrilatère convexe et M un point intérieur, alors :

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}\right) \leq \frac{1}{d_{AB}} + \frac{1}{d_{BC}} + \frac{1}{d_{CD}} + \frac{1}{d_{DA}}.$$

Plus généralement :

$A_1 A_2 \ldots A_n$ étant un polygone convexe de n côtés, et M un point intérieur, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{MA_i} \leq \cos\frac{\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\right)$ l'égalité ayant lieu si et seulement si $A_1 A_2 \ldots A_n$ est régulier et M en son centre.

ÉNONCÉ N° 176 (Dominique ROUX, Limoges)

Soit un triangle d'orthocentre H, O le centre et R le rayon du cercle circonscrit, I le centre et r le rayon du cercle inscrit. Si I est le milieu de [OO'], montrer que O'H = R - 2r

SOLUTION de Christian DUFIS (Limoges)

Soit Ω le centre du cercle d'EULER. Ω est le milieu de [OH] et par hypothèse I est le milieu de [OO'] donc O'H = 2 ΩI (1).

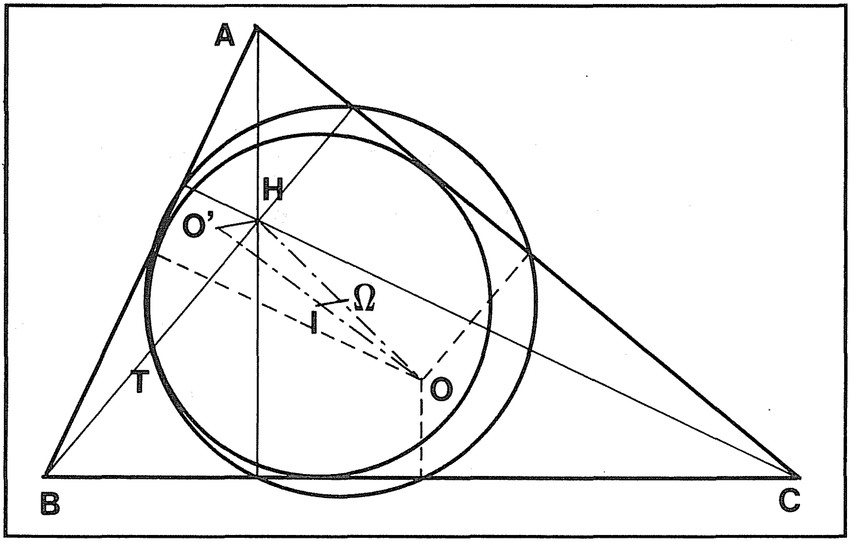
D'après le théorème de FEUEURBACH, le cercle d'EULER est tangent au cercle inscrit et aux 3 cercles exinscrits.

Plus précisément, le cercle d'EULER et le cercle inscrit sont tangents intérieurement, le cercle inscrit étant intérieur au cercle d'EULER. La distance de leur centre est donc égale à la différence des rayons.

Le rayon du cercle inscrit est r.

D'autre part, si R est le rayon du cercle circonscrit, celui du cercle d'EULER est $\frac{R}{2}$. Par suite $\Omega I = \frac{R}{2} - r$.

En utilisant (1), il en résulte O'H = R - 2r - cqfd -



Autres solutions

André ANGLÉS (Limoges), Henri BAREIL (Toulouse), Gaston BOUEZ (Paris), Jean-Claude CARREGA (Lyon), Maurice CRESTEY (La Guérinière), Edgar DELPLANCHE (Créteil), Georges LION (Nouméa), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë), Raymond RAYNAUD (Digne), Yvonne et René SORTAIS (Le Mans), André VIRICEL (Nancy).

Complément 1 dû à Yvonne et René SORTAIS.

Soit $A_2B_2C_2$ le triangle *antimédian* du triangle ABC, c'est-à-dire l'homothétique de ABC par l'homothétie h de centre G (centre de gravité de ABC) et de rapport (- 2). Le centre du cercle inscrit dans le triangle $A_2B_2C_2$ s'appelle point de NAGEL du triangle ABC. Il est noté N, c'est aussi le point de concours des droites joignant chaque sommet au point de contact d'un cercle exinscrit avec le côté opposé. Soit h' l'homothétie de centre I et de rapport (-1). On a :

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{h'} & I & \xrightarrow{h} & N \\ O' & \longrightarrow & O & \longrightarrow & H \end{array}$$

La composée $h \circ h'$ est une homothétie de rapport 2, de centre S tel que $\overrightarrow{SH} = 2\,\overrightarrow{SO'}$, donc tel que $\overrightarrow{O'H} = \overrightarrow{SO'}$.

On a aussi $\overrightarrow{SN} = 2\,\overrightarrow{SI}$, donc I est milieu de [SN]. I étant milieu de [SN] et [OO'], on a $\overrightarrow{SO'} = \overrightarrow{ON}$. Par conséquent : $\overrightarrow{O'H} = \overrightarrow{ON}$.

En particulier O'H = ON. La grandeur $R - 2r$ est donc la distance du point de NAGEL de ABC au centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Complément 2 : une conséquence dans l'espace.

➾ Elevons le résultat $O'H = R - 2r$ au carré : $O'H^2 = R^2 - 4Rr + 4r^2$ et tenons compte de la relation d'EULER : $OI^2 = R^2 - 2Rr$, on obtient : $O'H^2 - 2OI^2 = 4r^2 - R^2$.

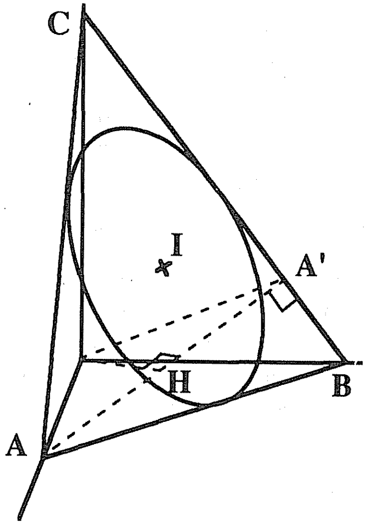
O' étant le barycentre de I affecté du coefficient 2 et O affecté du coefficient -1 la formule de LEIBNIZ donne (appliquée au point H) :

$$2\,HI^2 - HO^2 = HO'^2 + 2O'I^2 - O'O^2 = HO'^2 - 2OI^2.$$

D'où l'on déduit : $2HI^2 - HO^2 = 4r^2 - R^2$. (E)

➾ Soit alors un trièdre trirectangle de sommet S dont les faces sont tangentes à un cercle de centre I, dont le plan coupe les axes du trièdre en A, B et C. I est donc le centre du cercle inscrit à ABC.

On voit élémentairement que la projection orthogonale H de S sur le plan de ABC est l'orthocentre de ce triangle (car (AH) est orthogonal à (BC) etc...).



Si A' est la projection orthogonale de A sur (BC), le triangle SAA' est rectangle en S, donc $SH^2 = HA.HA'$, ce qui, compte tenu du fait que le symétrique de H par rapport à (BC) appartient au cercle circonscrit de ABC, permet d'interpréter $- SH^2$ comme étant la moitié de la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit à ABC, de centre O.

Donc $- SH^2 = \frac{1}{2}(OH^2 - R^2)$ (F)

➠ Enfin, calculons la longueur SI en utilisant le théorème de PYTHAGORE dans le triangle SIH rectangle en H :

$$SI^2 = SH^2 + HI^2 \quad \text{d'où avec (E) et (F) :}$$

$$SI^2 = -\frac{1}{2}(OH^2 - R^2) + \frac{1}{2}(OH^2 = 4r^2 - R^2) = 2r^2.$$

Ce résultat remarquable signifie que *la distance de S à I ne dépend que du rayon r du cercle tangent aux trois faces du trièdre, et non de sa position.*

C'est le problème de la roue de bicyclette :
Si l'on pose une roue de bicyclette au coin d'une pièce (elle touche deux murs et le sol), la distance du coin de la pièce au centre de la roue est indépendante de l'inclinaison de la roue. Cette distance vaut $r\sqrt{2}$.

Pour une démonstration analytique de ce résultat, on peut consulter les pages 106-107 du *livre du problème* volume 5, *calcul barycentrique*, CEDIC 1975.

En réalité, c'est en partant de ce résultat de géométrie dans l'espace, et par le cheminement inverse, que j'ai été conduit à imaginer l'énoncé N°176.

Complément 3 (au complément 2).

On vient de voir que l'ensemble des sommets des trièdres trirectangles dont les trois faces sont tangentes à un cercle donné est une sphère (*sphère "orthoptique"*). Ce résultat se généralisera en remplaçant le cercle par une *ellipse* (si l'on connaît un peu de géométrie projective) :

Soit ξ une ellipse, ABC un triangle circonscrit, et un trièdre trirectangle de sommet S dont les axes passent respectivement par A, B et C. S se projette sur le plan de ξ en H, orthocentre de ABC et, en désignant par A' le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle, on peut écrire $SH^2 = -\overline{HA} \cdot \overline{HA'}$ car le triangle SAA' est rectangle en S. Le cercle $\mathcal{C}$ est *harmoniquement circonscrit* à ξ donc est circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à ξ (Charles MICHEL, *compléments de géométrie moderne*, chap. II, Vuibert 1949). Le théorème de FAURE (Charles MICHEL, page 32) permet d'en déduire que $\mathcal{C}$ est orthogonal au cercle orthoptique de ξ de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$ (a et b demi-axes de ξ). Donc le carré de la distance des centres de ces deux cercles est égal à la somme des carrés de leurs rayons :

$$OH^2 = a^2 + b^2 + R^2.$$

Compte tenu de $SH^2 = -R^2$ (R est imaginaire) et de $SO^2 = SH^2 + OH^2$ (théorème de PYTHAGORE dans SOH), on conclut : $SO^2 = a^2 + b^2$. Ce qui prouve que *S décrit la sphère de centre O et de rayon* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

En fait on peut généraliser encore en remplaçant l'ellipse par un ellipsoïde et obtenir la sphère orthoptique de l'ellipsoïde lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à cet ellipsoïde.

ÉNONCÉ N°177 (Olympiades internationales 1988)

Soient a et b deux entiers naturels tels que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$. Montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ est le carré d'un entier.

SOLUTION de Marie-Laure CHAILLOUT (Sarcelles).

Soient deux entiers naturels a et b tels que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$.

On pose $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = c$ et on se place dans l'hypothèse où $b \geq a$.

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = c \Leftrightarrow \frac{a^2 + (ac-b)^2}{a\,(ac-b)+1} = c$$

Donc $a \neq 0 \Rightarrow ac - b \geq 0$.

D'autre part, $ac - b = \dfrac{a^3 - b}{ab + 1}$ donc $a \neq 0 \Rightarrow 0 \leq ac - b < a$.

Donc :

1) Si $a = 0$ alors $c = b^2$

2) Si $a \neq 0$ alors il existe un entier naturel unique d , $0 \leq d < a$, tel que

$$c = \frac{a^2 + d^2}{ad + 1}$$

On peut créer une suite d'entiers (u_n) définie par les valeurs de n telles que $u_n > 0$ par :

$$u_0 = b \quad u_1 = a \quad \text{et} \quad \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{u_n u_{n+1} + 1} = c$$

avec la formule de récurrence : [si $u_{n+1} > 0$ alors] $u_{n+2} = c\, u_{n+1} - u_n$.

La suite ainsi définie est strictement décroissante pour $n \geq 1$. Il existe donc une valeur finie de n telle que $u_{n+1} \leq 0$.
Or, $u_n u_{n+1} \geq 0$, donc $u_{n+1} = 0$.

Il existe donc $i \leq a$ telle que $u_{i+1} = 0$ et donc $c = u_i^2$. -cqfd-

exemple : Si $a = t$ et $b = t^3$ alors $c = t^2$.

Autres solutions :

André ANGLÉS (Limoges), Luc BARRIA (Serres-Morlaas), Jacques BOUTELOUP (Rouen), Jean COSTESEQUE (Toulouse), Edgard DELPLANCHE (Créteil), François LO JACOMO (Paris), René MANZONI (Le Havre), Charles NOTARI (Noë), A.MARTEL et R.RAYNAUD (Digne), Franck VASSEUR (Longuyon).

SOLUTIONS TARDIVES

N° 172 : André FLAMBARD (Versailles)
N°172, 173, 176, 177 : François COULOIGNIER (Forges les Eaux).

ERRATA *: Bulletin* n°378 : page 248 - lignes 6 et 7- au lieu de $\frac{1}{4}$ lire $\frac{1}{2}$