

# Une méthode géométrique pour évaluer les sommes des puissances des entiers successifs, en vue du calcul de sommes de Darboux

Marc Rogalski(\*)

## Résumé

L'introduction de l'intégrale en terminale S par l'aire demande de familiariser les élèves avec la notion « d'aire courbe », c'est-à-dire d'évaluer certaines sommes de Darboux ; ces évaluations peuvent permettre de motiver le « théorème fondamental de l'analyse ». Pour les graphes des fonctions puissances, cela demande de savoir calculer certaines sommes de puissances d'entiers. Nous proposons une méthode géométrique générale et très naturelle, immédiate à retrouver soi-même, permettant aisément ces calculs pour de petits exposants, et proposable à des élèves de terminale S.

## 1. Introduction et motivations

Le programme de terminale propose de définir l'intégrale d'une fonction continue positive  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  par l'aire de son sous-graphe. Cette définition a l'avantage de rapprocher l'intégrale de la mesure des grandeurs, qui est son champ initial et celui de ses utilisations courantes en physique élémentaire (mais le lien est encore insuffisant, à mon avis, voir [8]). Cette présentation demande bien sûr de faire le point avec les élèves sur quelques propriétés « intuitives » de l'aire, utilisées mais jamais dégagées explicitement antérieurement. Les considérations qui suivent sont extraites de [9].

Hormis l'aire de polygones variés, les élèves n'ont guère rencontré comme aire d'une région enfermée dans des lignes courbes que celle du disque. Psychologiquement, c'est pour eux le même concept d'aire qui est en jeu (notion vague d'étendue, quantité de peinture pour recouvrir, ...). Mais, au moins jusqu'en classe de troisième, et souvent au-delà, *il n'est pas mathématiquement opérationnel* de la même façon pour nombre d'entre eux : par découpage-quadrillage, ils voient que lorsqu'on double les dimensions d'un rectangle, son aire quadruple, alors que pour le disque certains croient que son aire double seulement (impossible de découper !). Ainsi, même si l'usage du même mot et l'intuition psychologique d'étendue unifient l'aire du rectangle et celle du disque, *du point de vue mathématique* ces deux aires vues dans les petites classes ne sont pas deux exemples du *même concept mathématique*, tant que la deuxième n'est pas *mathématiquement* rattachée à la première. Dans « La mesure des grandeurs », H. Lebesgue dit à juste titre qu'on pourrait très bien parler de l'aire du carré et du

(\*) Laboratoire Paul Painlevé (Université des Sciences et Technologies de Lille et CNRS).  
Équipe Didirem (Université Paris-Diderot). marc.rogalski@upmc.fr

« tarababoum » du disque jusqu'en terminale !

Donc, outre une mise au point sur des propriétés de l'aire (aire du carré unité, croissance par inclusion, invariance par les isométries, effet des homothéties et des affinités, aire nulle pour un segment, additivité, calcul de l'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés sont des nombres irrationnels, ...), il paraît nécessaire de faire prendre conscience aux élèves qu'on peut définir et calculer l'aire de certains domaines limités par des lignes courbes. Autrement dit, il faut sur quelques exemples encadrer une aire courbe entre deux polygones dont les aires diffèrent de  $\varepsilon$  et en particulier donner des exemples de sommes de Darboux. Deux exemples paraissent particulièrement utiles.

(a) Le calcul de l'aire du disque par encadrement par les polygones réguliers inscrits et circonscrits, pour unifier les deux types d'aire vus antérieurement par les élèves.

(b) Afin d'illustrer la définition de l'intégrale, le calcul de l'aire limitée par l'axe des  $x$ , la parabole  $y = x^2$ , et la verticale d'abscisse  $x$ , encadrée par des sommes de Darboux évaluées au moyen des sommes  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ . On trouve en passant à la limite  $x^3/3$ . L'extension de ce résultat à  $y = x^3$ ,  $y = x^4$ ,  $y = x^5$ , ... peut fournir une bonne motivation pour conjecturer le théorème général sur « la dérivée de l'aire », version géométrique du théorème fondamental de l'analyse : l'intégrale (c'est-à-dire l'aire en terminale) d'une fonction  $f \geq 0$  sur  $[a, x]$  en est une primitive. Bien sûr, cela va exiger de déterminer les sommes  $1^q + 2^q + 3^q + \dots + n^q$  pour  $q = 2, 3, 4, 5, \dots$

On peut évidemment « parachuter » les formules aux élèves, en leur demandant alors de les montrer par récurrence (voir par exemple [6], pages 40-41). Il me semble plus instructif de les leur faire découvrir par un procédé géométrique très naturel. C'est ce que nous proposons d'expliquer dans ce qui suit pour  $q = 1, 2, 3$ . De plus la méthode proposée, mise en œuvre pour  $q = 4, 5, \dots$  peut leur donner une certaine intuition d'objets géométriques dans  $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6, \dots$  par prolongement de leurs représentations dans le plan et l'espace. C'est ce que nous présentons dans une annexe accessible sur le site de l'APMEP.

## II. Le principe de la méthode

**Définition.** Si  $q \geq 1$  est un entier, on pose  $S_q(n) = 1^q + 2^q + 3^q + \dots + n^q$ , pour un entier  $n \geq 1$ . On posera par convention  $S_0(n) = n + 1$ , en accord avec l'écriture

formelle  $S_q(n) = \sum_{k=0}^n k^q$  et la convention  $0^0 = 1$ .

### Le cas $q = 1$

La figure 1 montre la relation, qui exprime une différence d'aires,

$$S_1(n) = n^2 - [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)], \quad (1)$$

soit  $S_1(n) = n^2 - [S_1(n) - n]$ , ce qui donne  $2S_1(n) = n^2 + n$ , c-à-d  $S_1(n) = n(n+1)/2$ .

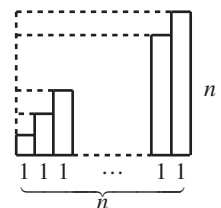


Figure 1

**Le cas  $q = 2$** 

La figure 2 étend au cas  $q = 2$  le même raisonnement géométrique par différence d'aires, et donne la formule

$$S_2(n) = n \times \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} (1+2+3+\dots+k) \quad (2)$$

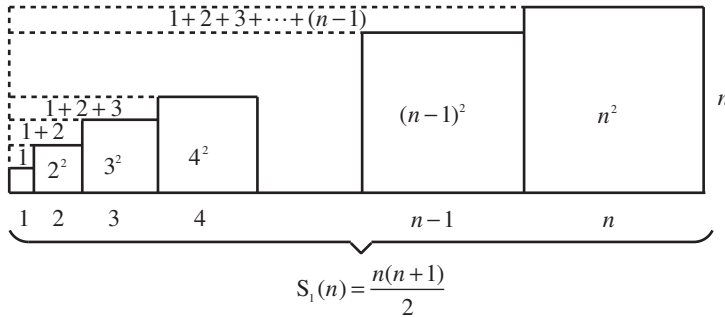


Figure 2

On en déduit la relation

$$S_2(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}(S_2(n) - n^2) - \frac{1}{2}(S_1(n) - n)$$

d'où résulte la formule :

$$\frac{3}{2}S_2(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$

soit finalement

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$$

**Remarque 1.** Le lecteur vérifiera aisément que l'évaluation de  $S_2(n)$  par différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des bandes *verticales* de bases  $k$  et de hauteurs  $n - k$  donnerait seulement ...  $S_2(n) = S_2(n-1) + n^2$ , soit ...  $0 = 0!$

**Le cas  $q = 3$** 

La figure 3 illustre la même démarche pour  $q = 3$ , cette fois par différence entre le volume du grand parallélépipède et ceux de  $n - 1$  cylindres à base en forme d'équerre, et donne la formule

$$S_2(n) = n^2 \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} (1+2+3+\dots+k) [(k+1)^2 - k^2] \quad (4)$$

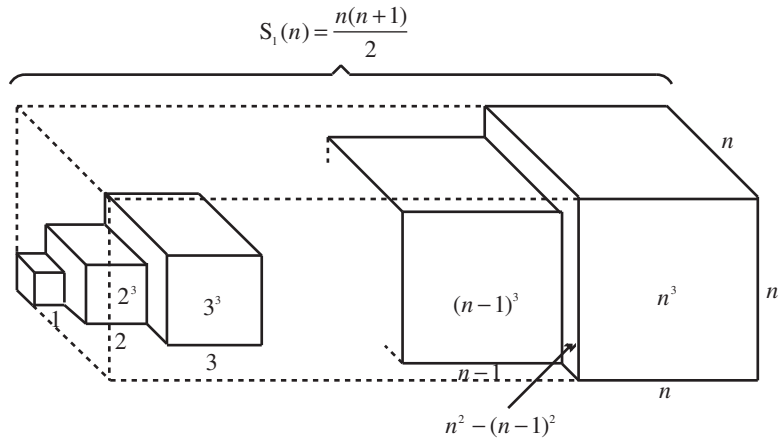


Figure 3

Il y a  $n - 1$  cylindres, numérotés de 1 à  $n - 1$ , le  $k$ -ième a pour hauteur  $1 + 2 + \dots + k$  et pour base une équerre 2-dimensionnelle, d'aire la différence des aires de deux carrés :  $(k + 1)^2 - k^2$  (voir figure 4).

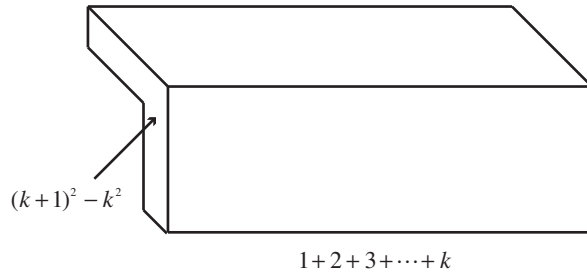


Figure 4

De la formule (4), on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{n^3(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} (2k+1) \\ &= \frac{n^3(n+1)}{2} - (S_3(n) - n^3) - \frac{3}{2}(S_2(n) - n^2) - \frac{1}{2}(S_1(n) - n), \end{aligned}$$

d'où l'on tire par un calcul simple la relation classique

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{5}$$

**Remarque 2.** Là aussi, il est aisé de voir qu'évaluer  $S_3(n)$  par différence entre le volume du pavé et la somme de ceux des cylindres de hauteurs  $k$  et de bases en forme d'équerres d'aire  $n^2 - k^2$  ne donne rien d'autre que ...  $0 = 0$  !

### III. Pour en savoir plus : le calcul de $S_{q+1}(n)$ pour $q \geq 3$

On pourrait, avec les élèves, s'arrêter après le calcul de  $S_3(n)$ , ce qui permettrait déjà de calculer, par des limites de sommes de Darboux encadrant l'aire sous les courbes

$x \mapsto x^q$  pour  $q = 1, 2$  et  $3$ , les intégrales de  $0$  à  $x$  de ces trois fonctions :  $\frac{x^{q+1}}{q+1}$ , ce

qui peut suffire pour conjecturer le théorème fondamental de l'analyse.

Mais il me semble que des élèves pourraient être intéressés par l'intuition « hypergéométrique » des hypercubes, permettant d'établir la même formule initiale pour amorcer le calcul de  $S_{q+1}(n)$ , et en tout cas celui de  $S_4(n)$ . Nous proposons ce prolongement de la méthode en dimension supérieure dans une annexe qu'on trouvera sur le site de l'APMEP : <http://www.apmep.asso.fr>.

Essentiellement, on trouvera dans cette annexe la « formule géométrique » suivante, généralisant les formules (1), (2) et (4)

$$S_{q+1}(n) = n^q \times \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} (1+2+3+\dots+k) [(k+1)^q - k^q] \quad (6)$$

et une formule générale de récurrence qu'on peut en déduire.

**Remarque 3.** Il y a longtemps que les mathématiciens ont imaginé des preuves géométriques de relations (considérées aujourd'hui comme) algébriques, par exemple certaines preuves par « la méthode des aires » qu'on trouve chez Euclide, et d'autres chez Archimède. On en trouvera quelques exemples dans [1], [4], [5], [10], [11]. On peut aussi apprécier ce que propose [6], pages 161-162, pour calculer l'aire de l'arche de cycloïde (comparer à la méthode de Roberval – voir par exemple [8] page 184). On peut par ailleurs se délecter du remarquable texte [2]. Pour l'intérêt de prouver un même résultat dans des cadres très différents, voir [7], en particulier l'annexe 1 pour  $S_1(n)$ , et aussi  $S_q(n)$ .

Enfin on peut comparer la méthode que nous avons proposée à la preuve géométrique très astucieuse due à Alhazen (ou Ibn-Al-Haytham), exposée dans [11]. Cette dernière preuve met en valeur la prise de distance par rapport aux conceptions des mathématiciens grecs sur les nombres : ceux-ci n'auraient sans-doute jamais représenté une puissance  $n^p$  par une longueur (pour  $p \geq 2$ ) ou une aire (pour  $p \geq 3$ ), comme le fait Alhazen. Par contre notre méthode pour  $q = 1, 2, 3$  est tout à fait conforme à la tradition grecque de représenter des puissances  $1, 2$  et  $3$  par des longueurs, des aires et des volumes.

**Remarque 4.** Nous avons situé la méthode géométrique pour déterminer les sommes  $S_q(n)$  dans le cadre de l'évaluation de l'intégrale entre  $0$  et  $x$  de la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  pour  $\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots$ , en vue de motiver le « théorème fondamental de l'analyse ».

Signalons qu'il existe une preuve de ce que cette intégrale vaut  $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  pour  $\alpha \neq -1$

*réel*, qui n'utilise ni les sommes de Darboux, ni le théorème fondamental de l'analyse, ni l'additivité de l'intégrale (pour  $\alpha = -1$  cette méthode donne le théorème de Grégoire

de Saint-Vincent : « si les abscisses sont en progression géométrique, les aires sous la courbe  $y = 1/x$  sont en progression arithmétique ». Mais cette preuve, simple dans son principe (elle n'utilise que l'effet d'une affinité orthogonale et celui d'une symétrie orthogonale sur les aires), est trop longue et subtile pour trouver sa place au lycée (on peut se procurer cette preuve en écrivant à marc.rogalski@upmc.fr).

Rappelons à ce propos (voir [9]) que la définition de l'intégrale par l'aire du sous-graphe (comme en terminale) nécessite, pour prouver l'additivité de l'intégrale, de passer, soit par les sommes de Darboux et leur convergence, soit par le théorème fondamental de l'analyse qui montre le rapport entre aire et primitive, avec utilisation du théorème des accroissements finis (sous la forme disponible en première, mais admise :  $(f' = 0) \Rightarrow (f = \text{constante})$ ).

### Bibliographie

- [1] Bettinelli B., *Intuition et démonstration chez Archimède*, Repères-IREM n° 2, 1991.
- [2] Bettinelli B., *Le trésor d'Archimède*, IREM de Besançon.
- [3] Bourbaki N., *Fonctions d'une variable réelle*, Hermann, 1976.
- [4] Busser E., Cohen G., Criton M., Novelli B., *Prouver sans rien dire*. La Recherche, décembre 2004, n° 381.
- [5] Goldoni G., *A visual proof for the sum of the first  $n$  squares and for the sum of the first  $n$  factorials of order two*. The Mathematical Intelligencer, volume 24, n° 24, 2002.
- [6] Manuel de l'IREM de Strasbourg, première S, Éditions Istra, 1988.
- [7] Rogalski M., *Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady*, Actes de la journée en hommage à Régine Douady (juin 2001), Publication de l'IREM de l'Université Paris-Diderot, 2002.
- [8] Rogalski M. et al., *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Ellipses, Paris, 2001.
- [9] Rogalski M., *Quelques reliefs du côté de l'intégrale*, annexe n° 1 dans : M. Pariès, N. Pouyane, A. Robert, E. Roditi, M. Rogalski : *Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples*. Document pour la formation des enseignants n° 9, IREM de l'Université Paris-Diderot, 2007.
- [10] Sin Hitotumatu, *Letter to the Editor*, The Mathematical Intelligencer, volume 25, n° 3, 2003.
- [11] Stoll A., *Comment l'histoire des mathématiques peut nous dévoiler une approche possible du calcul intégral*, Repères-IREM n° 11, 1993.