Je prends comme unité OH = 1 et je pose $HA_i = x_i$.
L'aire du triangle OA_0A_1 vaut

$$\frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{r}{2}\left(OA_0 + OA_1 + x_1 - x_0\right),$$

d'où

$$\frac{r}{1-r} = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{1+x_1^2} + \sqrt{1+x_0^2}}.$$

Il est alors intéressant de poser $x_i = \sinh(t_i)$. On en déduit :

$$\frac{r}{1-r} = \frac{\sinh(t_1) - \sinh(t_0)}{\cosh(t_1) + \cosh(t_0)} = \tanh\frac{t_1 - t_0}{2}.$$

D'où

$$t_1 - t_0 = 2\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}.$$

Par hypothèse on a pour tout i :

$$t_{i+1} - t_i = 2\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}.$$

Par suite, pour tout n :

$$t_{i+n} - t_i = 2n\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}.$$

Cela démontre que les cercles inscrits dans les triangles OA_iA_{i+n} ont le même rayon r_n donné par :

$$2\,\mathrm{argth}\frac{r_n}{1-r_n} = 2n\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}.$$

On montre ensuite :

$$\frac{r_{n+1}}{1-r_{n+1}} = \tanh\left((n+1)\,\mathrm{argth}\frac{r}{1-r}\right) = \frac{\dfrac{r_n}{1-r_n} + \dfrac{r}{1-r}}{1 + \dfrac{r_n}{1-r_n}\dfrac{r}{1-r}},$$

d'où l'on déduit $r_{n+1} = (1-r)r_n + r(1-r_n)$ qui entraine la formule remarquable :

$$1 - 2r_n = (1-2r)^n.$$

Claude Morin indique ne pas avoir trouvé d'interprétation géométrique de cette formule.