Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon). On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et A′, B′, C′ les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB]. Le point A′ est aussi le milieu de $[A_1A_2]$ donc $OA_1 = OA_2$. De même, $OB_1 = OB_2$ et $OC_1 = OC_2$. Pour montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont situés sur un même cercle de centre O, il suffit d'établir $OA_1 = OB_1 = OC_1$. Par symétrie des rôles joués par A_1, B_1, C_1, montrer que $OA_1 = OB_1$ suffit. Dans le triangle rectangle $OA'A_1$, on a

$$OA_1^2 = OA'^2 + A'A_1^2 = OA'^2 + A'H^2.$$

De même, dans le triangle rectangle $OB'B_1$, on a

$$OB_1^2 = OB'^2 + B'H^2.$$

L'égalité $OA_1 = OB_1$ équivaut donc à

$$OA'^2 - OB'^2 = HB'^2 - HA'^2.$$

On note U la projection orthogonale de O sur la droite (A′B′) et I le milieu du segment [A′B′]. On a alors

$$OA'^2 - OB'^2 = 2\overline{A'B'} \times \overline{IU}.$$

De même, en notant V la projection orthogonale de H sur (A'-B'),

$$HB'^2 - HA'^2 = 2\overline{B'A'} \times \overline{IV}.$$

Finalement, $OA_1 = OB_1$ équivaut à

$$\overline{A'B'} \times \overline{IU} = \overline{B'A'} \times \overline{IV},$$

soit encore à

$$\overline{IU} = -\overline{IV}.$$

Il s'agit maintenant de montrer que I est le milieu du segment [UV]. On note H_1 le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C. Puisque (A′B′) est parallèle à (AB), cette hauteur coupe le segment [A′B′] en V et l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme A en B′ et H_1 en V. Il en résulte que

$$B'V = \frac{1}{2}AH_1.$$

Puisque (A′B′) est parallèle à (AB), U est le pied de la hauteur du triangle A′B′C′ issue de C′. On note G le centre de gravité du triangle ABC. L'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme le triangle ABC en le triangle A′B′C′ donc transforme la hauteur du triangle ABC issue de C en la hauteur du triangle A′B′C′ issue de C′, c'est-à-dire qu'elle transforme H_1 en U. Finalement,

$$A'U = \frac{1}{2}AH_1.$$

On a ainsi établi A′U = B′V. Puisque I est le milieu de [A′B′], c'est aussi le milieu de [UV], ce qui montre que $OA_1 = OB_1$ et clôt la démonstration.