Solution de Georges Lion (Wallis). On note toujours K le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et A′, B′ les milieux de [BC] et [C'A]. On introduit également le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC. On a les relations classiques

$$OA' = R\cos\left(\widehat{A}\right),\ HK = BK\cot\left(\widehat{C}\right),\ KA' = \frac{1}{2}BC - BK.$$

On utilise la relation

$$OA_1^{\,2} = OA'^2 + A'H^2 = OA'^2 + A'K^2 + KH^2$$

et les formules telles que

$$BC = 2R\sin\left(\widehat{A}\right).$$

Cela donne

$$\begin{aligned} OA_1^{\,2} &= R^2\left(\cos^2\left(\widehat{A}\right) + \sin^2\left(\widehat{A}\right) + 4\cos^2\left(\widehat{B}\right) - 4\sin\left(\widehat{A}\right)\sin\left(\widehat{B}\right)\sin\left(\widehat{C}\right)\right) \\ &= R^2\left(1 - 4\cos\left(\widehat{A}\right)\cos\left(\widehat{B}\right)\cos\left(\widehat{C}\right)\right). \end{aligned}$$

Cette expression étant symétrique en A, B, C, il en découle l'égalité des six distances au point O.

Georges Lion propose également une solution en considérant une inversion de pôle H préservant le cercle circonscrit au triangle A-BC.