Solution. L'inégalité à établir s'écrit

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}\geq 1-\frac{z^2}{(z-1)^2},$$

soit, en mettant au même dénominateur,

$$\frac{2x^2y^2-2xy(x+y)+x^2+y^2}{(xy-x-y+1)^2}\geq\frac{1-2z}{(z-1)^2}.$$

On pose $s = x + y$ et $p = xy$ donc $z=\frac{1}{p}$. Il s'agit alors de montrer que

$$\frac{2p^2-2ps+s^2-2p}{(p-s+1)^2}\geq\frac{p^2-2p}{(1-p)^2}$$

ou encore, après un calcul sans surprise,

$$s^2+2s\left(p^2-3p\right)+\left(p^2-3p\right)^2\geq 0,$$

inégalité évidente puisqu'elle équivaut à

$$\left(s+p^2-3p\right)^2\geq 0.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $s = 3p - p^2$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont les racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2+\left(p^2-3p\right)\mathrm{X}+p=0 \qquad (4)$$

dont le discriminant est

$$\Delta=\left(p^2-3p\right)^2-4p=p(p-1)^2(p-4).$$

L'existence de solutions réelles pour l'équation (4) est équivalente à la condition $\Delta \geq 0$, i.e. à $p \geq 4$ ou $p < 0$ (les cas $p = 0$ ou $p = 1$ étant exclus par les hypothèses $pz = 1$ et $z \neq 1$). Les racines de l'équation (4) sont alors

$$\frac{1}{2}\left(3p-p^2\pm(p-1)\sqrt{p(p-4)}\right).$$

Pour transformer $p\ (p - 4) = (p - 2)^2 - 4$ en carré, on peut transformer p en $2 \pm 2\mathrm{ch}(\alpha)$, mais en vue d'une paramétrisation rationnelle, il est préférable de faire le changement de variable

$$p=2+t+\frac{1}{t} \text{ avec } t\in\mathbb{R}-\{-1,0\}.$$

On a exclu la valeur $t = -1$ pour laquelle $p = 0$. Un calcul montre alors que $p(p-4)=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2$ et que les racines de l'équation (4) sont $-t(1+t)$ et $-\frac{1+t}{t^2}$. Le changement de variable $t\mapsto\frac{1}{t}$ permute les deux racines. Comme t parcourt $\mathbb{R}-\{-1,0\}$, on peut choisir $x(t)=-t(1+t)$ et $y(t)=-\frac{1+t}{t^2}$. Enfin, $z(t)=\frac{1}{x(t)y(t)}=-\frac{t}{(1+t)^2}$. Finalement, la courbe définie par les équations

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}=1=xyz$$

est paramétrée par

$$x(t)=-\frac{t+1}{t^2},\ y(t)=-t(t+1),\ z(t)=\frac{t}{(t+1)^2}\quad \left(t\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\right).$$

Les paramétrages $x = x(t)$, $y = y(t)$ et la relation

$$t=\frac{(1-x)(1-y)}{xy} \tag{5}$$

montrent que t est rationnel si et seulement si $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ le sont. On a ainsi toutes les solutions rationnelles. Il y en a une infinité, puisque l'application $t\in\mathbb{Q}-\{-1,0\}\mapsto\left(x(t),y(t)\right)$ est injective d'après la relation (5).