Franck Gautier (Pérignat lès Sarliève) et **Jean-Christophe Laugier (Rochefort)** établissent l'inégalité très rapidement. On pose par exemple

$$a=\frac{x}{x-1},\quad b=\frac{y}{y-1},\quad c=\frac{z}{z-1}.$$

La condition $xyz=1$ équivaut à

$$abc=(a-1)(b-1)(c-1).$$

En notant

$$\sigma_1=a+b+c \quad \text{et} \quad \sigma_2=ab+ac+bc,$$

cela équivaut à

$$\sigma_1=1+\sigma_2.$$

On a alors

$$a^2+b^2+c^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=1+\sigma_2^2\geq 1,$$

ce qui est l'inégalité recherchée.
Jean-Christophe Laugier propose comme solutions rationnelles

$$x_2(n)=-2\frac{n+1}{(n-1)^2},\ y_2(n)=2\frac{n-1}{(n+1)^2},\ z_2(n)=\frac{1-n^2}{4}\quad (n\in\mathbb{N}-\{1\})$$

Là encore, on peut prendre n dans $\mathbb{Q}-\{-1,1\}$ et l'on obtient les mêmes solutions que précédemment. Le passage de ce paramétrage à celui de Jean-Claude Carréga se fait ainsi :

$$x_2(-n-1)=x_1(n),\quad y_2(-n-1)=y_1(n),\quad z_2(-n-1)=z_1(n).$$

Enfin, Franck Gautier propose comme solutions rationnelles

$$\left(\frac{-(t-1)(3t-1)(3t+1)(t+1)}{16t^2},\frac{-4t(t+1)(3t-1)}{(3t+1)^2(t-1)^2},\frac{4t(t-1)(3t+1)}{(3t-1)^2(t+1)^2}\right)$$

pour $t\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cap\mathbb{Q}^*$. Il remarque que $x(-t)=x(t),\ y(-t)=z(t)$ et aussi que $x\left(\frac{1}{3t}\right)=x(t),\ y\left(\frac{1}{3t}\right)=z(t)$. Étendre le domaine de variation de t ne donnerait que de nouveaux triplets obtenus par permutation de y et z.