Solution. En prenant $w = x = y = z > 0$, on obtient, pour tout $w > 0$, $f(w)^2 = f(w^2)$. En spécialisant en $w = 1$ et comme f est strictement positive, on a $f(1) = 1$. Fixons alors $w > 0$ et choisissons $x = 1$, $y = z = \sqrt{w}$. On a

$$\left(f(w)^2 + 1\right)w = f(w)\left(w^2 + 1\right),$$

soit

$$\left(wf(w) - 1\right)\left(f(w) - w\right) = 0$$

et

$$f(w) = w \quad \text{ou} \quad f(w) = \frac{1}{w}.$$

A priori, les deux choix sont possibles pour chaque $w > 0$. Montrons qu'il n'en est rien en supposant qu'existent $a,\ b > 0$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = \dfrac{1}{b}$ avec $a,\ b \neq 1$. L'équation fonctionnelle testée en $w = \sqrt{ab}$, $x = 1$, $y = \sqrt{a}$ et $z = \sqrt{b}$ donne (puisque $f(x)^2 = f(x^2)$)

$$\frac{f(ab) + 1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{ab + 1}{a + b}.$$

Mais $f(ab)$ ne peut prendre que deux valeurs, à savoir ab ou $\dfrac{1}{ab}$. La première valeur $f(ab) = ab$ conduit à $\dfrac{ab+1}{a + \frac{1}{b}} = \dfrac{ab+1}{a+b}$, soit $b = 1$ (ce qui est exclu) et la seconde valeur $f(ab) = \dfrac{1}{ab}$ donne $\dfrac{\frac{1}{ab} + 1}{a + \frac{1}{b}} = \dfrac{ab+1}{a+b}$, soit $a = 1$ (également exclu).

Finalement, f ne peut être que l'identité ou $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On vérifie aisément que ces deux applications conviennent.