Solution de Bernard Collignon (Coursan)

Les coefficients a, b et c vérifient le système $\begin{cases} c = f(0) \\ a+b+c = f(1) \\ a-b+c = f(-1) \end{cases}$ d'où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\left[f(-1)+f(1)-2f(0)\right] \\ b = \frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right] \\ c = f(0) \end{cases}.$$

On a donc pour tout x :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(-1)+f(1)-2f(0)\right]x^2 + \frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right]x + f(0)$$

et

$$g(x) = f(0)x^2 + \frac{1}{2}\left[f(1)-f(-1)\right]x + \frac{1}{2}\left[f(-1)+f(1)-2f(0)\right],$$

ce qui s'écrit encore :

$$f(x) = \frac{f(-1)}{2}\left(x^2-x\right) + f(0)\left(1-x^2\right) + \frac{f(1)}{2}\left(x^2+x\right)$$

et

$$g(x) = \frac{f(-1)}{2}(1-x) + f(0)\left(x^2-1\right) + \frac{f(1)}{2}(1+x).$$

Première inégalité : démontrons que pour tout x vérifiant $|x| \leq 1$ on a $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$.

Pour tout x,

$$|f(x)| \leq \left|\frac{f(-1)}{2}\right|\left|x^2-x\right| + |f(0)|\left|1-x^2\right| + \left|\frac{f(1)}{2}\right|\left|x^2+x\right|.$$

Donc d'après les hypothèses :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\left|x^2-x\right| + \left|1-x^2\right| + \frac{1}{2}\left|x^2+x\right|.$$

Premier cas : $-1 \leq x \leq 0$. Alors $x^2 - x \geq 0$, $x^2 + x \leq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$ d'où :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\left(x^2-x\right) + \left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+x\right),$$

$$|f(x)| \leq 1-x-x^2 \Leftrightarrow |f(x)| \leq \frac{5}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

donc $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$.

Deuxième cas : $0 \leq x \leq 1$. Alors $x^2 - x \leq 0$, $x^2 + x \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$ d'où :

$$|f(x)| \leq -\frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) + \left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right),$$

$$|f(x)| \leq 1 + x - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| \leq \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

donc $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$.

Remarque. $\frac{5}{4}$ est effectivement atteint pour $a = -1$, $b = c = 1$ soit $f(x) = -x^2 + x + 1$ avec $x = \frac{1}{2}$.

Et $-\frac{5}{4}$ est effectivement atteint pour $a = 1$, $b = c = -1$ soit $f(x) = x^2 - x - 1$ avec $x = \frac{1}{2}$

Et de manière symétrique, $-\frac{5}{4}$ est atteint pour $x = -\frac{1}{2}$ avec la fonction $f(x) = x^2 + x - 1$ et $\frac{5}{4}$ est atteint pour $x = -\frac{1}{2}$ avec la fonction $f(x) = -x^2 - x + 1$.

Deuxième inégalité : démontrons que pour tout x vérifiant $|x| \leq 1$ on a $|g(x)| \leq 2$.
Pour tout x,

$$|g(x)| \leq \left|\frac{f(-1)}{2}\right||1 - x| + |f(0)|\left|x^2 - 1\right| + \left|\frac{f(1)}{2}\right||1 + x|.$$

Donc d'après les hypothèses :

$$|g(x)| \leq \frac{1}{2}|1 - x| + \left|x^2 - 1\right| + \frac{1}{2}|1 + x|.$$

Pour tout x vérifiant $-1 \leq x \leq 1$, on a $1 - x \geq 0$, $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$, d'où :

$$|g(x)| \leq \frac{1}{2}(1 - x) + \left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}(1 + x),$$

$$|g(x)| \leq 2 - x^2$$

donc $|g(x)| \leq 2$.

Remarque : 2 est effectivement atteint par exemple pour $x = 0$ avec $g(x) = -x^2 + 2$, et dans ce cas $f(x) = 2x^2 - 1$.

Autre solution : Daniel Reisz (Auxerre).

Nota. Les données de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ permettent de définir les coefficients a, b et c du trinôme $ax^2 + bx + c$. On peut alors obtenir les tracés de f et g, sur Géogébra par exemple, et vérifier – voire conjecturer – la demande de l'exercice, en fonction des valeurs attribuées à $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
Ces fichiers Géogébra sont disponibles sur le site national de l'APMEP, rubrique Publications » Le Bulletin Vert » Les sommaires » Sommaire du Bulletin n° 484.