Solution de Louis-Marie Bonneval (Poitiers)

La règle est vérifiée pour des fonctions f et g constantes. On écarte ce cas pour la suite.
On peut également remarquer que si le couple (f, g) est solution, alors le couple $(\alpha f,\ \beta g)$ où α et β sont des constantes, est aussi solution.

L'équation $(fg)' = f'g'$ s'écrit $f'g + fg' = f'g'$ c'est-à-dire $\dfrac{g}{g'} + \dfrac{f}{f'} = 1$.

On en tire $\dfrac{g'}{g} = \dfrac{f'}{f' - f}$, d'où $\ln|g| = \int \dfrac{f'}{f' - f}$ et donc

$$\boxed{g = k \exp\left(\int \frac{f'}{f' - f}\right)}$$

(k constante).
On peut donc choisir une fonction f de classe C_1 : g sera alors définie, sur tout intervalle où $f'(x) \neq f(x)$, par la formule ci-dessus.

Exemples :

1) $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$, avec $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

2) $f(x) = x^n$ (n naturel non nul), et $g(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$ sur $]-\infty, n[$ ou sur $]n, +\infty[$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$, sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Autre solution : Raymond Raynaud (Digne), Daniel Reisz (Auxerre).