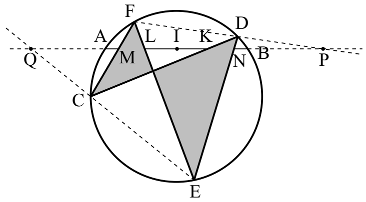
Sept d'un coup.

Georges Lion.

Introduction : Cet article relate les péripéties de la recherche d'une solution élémentaire pour l'exercice proposé par Michel Lafond dans le bulletin vert numéro 467 (Théorème du sphinx).



Si dans un cercle, AB est une corde de milieu I et si CD et EF sont deux a utres cordes coupant AB respectivement en K et L avec I milieu de KL, alors :
Aile 1 : Si FC et DE coupent AB respectivement en M et N alors I est milieu de MN.
Aile 2 : Si FD et EC coupent AB respectivement en P et Q alors I est milieu de PQ.

La recherche géométrique est une aventure personnelle. Dans l'apparition des idées les goûts et les connaissances de chacun jouent un rôle essentiel. Pour en rendre compte j'ai respecté scrupuleusement la chronologie dans l'obtention des diverses solutions. En particulier et à la surprise des collègues consultés, ma première idée fut d'appliquer le théorème de Désargues-Sturm dont la connaissance, courante à Bac + 1 il y a 50 ans, fait maintenant figure de vieille lune réservée à quelques "érudits" un peu décadents.
Mes interlocuteurs furent davantage satisfaits de me voir chercher une fonction symétrique des points C, D, E, F, objectif qui m'a guidé au cours des démonstrations II, III et plus tard VII.
En filigrane jusqu'alors, le rôle de la symétrie ayant pour axe la médiatrice de $[AB]$ s'imposa ensuite au grand jour dans les solutions IV, V, VI qui manifestent une progression vers la simplicité. La mise au point d'une démonstration élémentaire apparaît ainsi comme l'aboutissement d'autres méthodes plus sophistiquées.
Au cours de ce travail quelques pauses m'ont permis de lire les contes de Grimm et notamment l'histoire du petit tailleur qui, après avoir écrasé sept mouches d'un seul coup de chiffon, décida soudain de devenir un héros dont les exploits seraient toujours au nombre de 7. Dans mon modeste cas il s'agissait de trouver une *septième* démonstration. Ayant d'abord réalisé que les cordes d'un cercle sont aussi les droites pour le modèle de Beltrami de la géométrie hyperbolique je fus bientôt emporté par un souffle bénéfique et réconfortant.

Solution I (Géométrie algébrique) : Si l'on connait le théorème de Désargues-Sturm il suffit de l'appliquer de la manière suivante. Le pinceau des coniques passant par C, D, E, F détermine sur la droite (AB) une involution algébrique dont on connait les couples (A, B) et (K, L). Cette involution ne peut être que la symétrie de centre I si bien que I est aussi le milieu de $[MN]$ et de $[PQ]$.

Pensant aux lecteurs qui ignorent le théorème de Désargues-Sturm on va expliciter la démarche algébrique sous jacente à cette solution.
Dans le plan du cercle prenons un repère orthonormé de centre I et pour lequel (AB) est l'axe des abscisses. Si $\mathcal{G}(x, y) = 0$ est l'équation du cercle les abscisses de A et de B sont les solutions de l'équation $\mathcal{G}(x, 0) = 0$. Ayant deux solutions opposées cette équation s'écrit $x^2 + \alpha = 0$.

Par produit des équations de (CD) et de (EF) on obtient pour $(CD) \cup (EF)$ l'équation $\mathcal{F}(x, y) = 0$ et les abscisses de K et de L sont les solutions de l'équation $\mathcal{F}(x, 0)$. Ayant deux solutions opposées cette équation s'écrit à un facteur t près $x^2 + \beta = 0$.

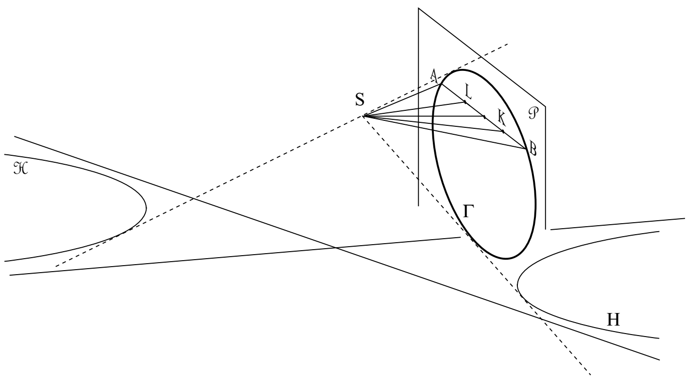
Quelle que soit la valeur du paramètre λ la courbe Λ d'équation $\mathcal{G}(x, y) + \lambda\mathcal{F}(x, y) = 0$ passe par les points C, D, E, F. Choisissons désormais $\lambda = -\dfrac{\mathcal{G}(M)}{\mathcal{F}(M)}$ si bien que Λ passe aussi par M et coupe ainsi la droite (CF) en trois points distincts. Prenant momentanément la droite (CF) pour l'un des axes d'un repère, il apparaît que Λ, de degré 2, contient nécessairement la droite (CF) toute entière et se trouve décomposée en la réunion de (CF) et d'une autre droite qui ne peut être que (DE).

Les abscisses de M et de N sont donc les solutions de l'équation $\mathcal{G}(x,0) + \lambda\mathcal{F}(x,0) = 0$, c'est-à-dire $x^2(1 + t\lambda) + (\alpha + t\lambda\beta) = 0$. Ces solutions sont opposées donc I est bien le milieu du segment $[MN]$. On voit de même que I est le milieu de $[PQ]$.

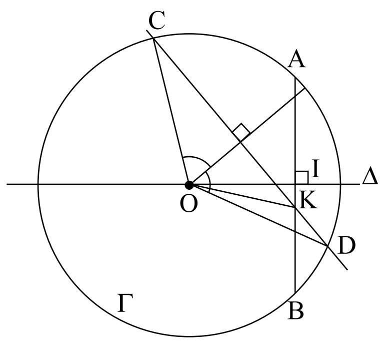
Un problème posé au CAPES il y a une dizaine d'années mettait en lumière la simplicité des calculs relatifs à l'ensemble $\{(x,y)|xy = 1\}$. D'où l'idée de transformer le cercle de l'énoncé en une hyperbole.

Solution II (Perspective) : Plongeons le plan $\mathcal{P}$ de la figure dans l'espace et soit S un point hors de $\mathcal{P}$ tel que le triangle ASB soit isocèle rectangle en S. Les droites (SA) et (SB) d'une part, (SK) et (SL) d'autre part sont symétriques par rapport à (SI).

Par perspective à partir de S sur un plan parallèle au plan (ASB) le cercle et les droites (CD) et (EF) ont respectivement pour images une hyperbole équilatère $(\mathcal{H})$ et deux droites (C_1D_1) et (E_1F_1) de directions symétriques par rapport aux axes de $(\mathcal{H})$.
Dans le plan de $(\mathcal{H})$ prenons l'unité de longueur et le repère orthonormé tels que $(\mathcal{H})$ ait pour équation $xy = 1$. Deux droites de ce plan ont alors des directions symétriques par rapport aux axes de $(\mathcal{H})$ ssi le produit de leurs coefficients directeurs est égal à 1.
Notant c_1, d_1, e_1, f_1 les abscisses des points C_1, D_1, E_1, F_1 on a donc : $-\dfrac{1}{c_1d_1} \times -\dfrac{1}{e_1f_1} = 1$, soit $c_1d_1e_1f_1 = 1$.
Réciproquement cette condition implique : $-\dfrac{1}{c_1f_1} \times -\dfrac{1}{d_1e_1} = 1$ ce qui signifie la symétrie des directions de (C_1F_1) et de (D_1E_1) par rapport aux axes de $(\mathcal{H})$. Par retour au plan $\mathcal{P}$ on en déduit que I est le milieu de $[MN]$. On procède de même pour $[PQ]$.



Solution II



Solution III

La fonction symétrique de C, D, E, F qui vient d'être exhibée élève le débat et il devient alors naturel de déterminer une telle fonction en évitant la transformation du cercle en une autre courbe. Sans aucune idée géométrique a priori je n'avais plus qu'à m'en remettre à un calcul trigonométrique qui ne fut pas vraiment une partie de plaisir.

Solution III (Calcul) : Dans le plan complexe prenons le cercle étudié pour cercle unité et l'axe réel perpendiculaire à la droite (AB).
Notons $a, b = -a, ..., e, f$ les arguments des points $A, B, ...E, F$. Par hypothèse aucune des cordes étudiées autre que (AB) ne lui est parallèle si bien que $\sin\dfrac{c+d}{2}, ..., \sin\dfrac{e+f}{2}$ sont tous non nuls.

Posant $r = \cos a$, la droite (CD) coupe (AB) en le point d'affixe $r{+}\mathrm{i}s$ ssi l'on a :

$$r\cos\frac{c+d}{2} + s\sin\frac{c+d}{2} = \cos\frac{c-d}{2}.$$

ou encore :

$$s = \frac{\cos\frac{c-d}{2} - r\cos\frac{c+d}{2}}{\sin\frac{c+d}{2}}.$$

Les droites (CD) et (EF) coupent (AB) en deux points d'affixes conjugués ssi :

$$\frac{\cos\frac{c-d}{2} - r\cos\frac{c+d}{2}}{\sin\frac{c+d}{2}} + \frac{\cos\frac{e-f}{2} - r\cos\frac{e+f}{2}}{\sin\frac{e+f}{2}} = 0,$$

c'est à dire : $\cos\dfrac{c-d}{2}\sin\dfrac{e+f}{2} + \cos\dfrac{e-f}{2}\sin\dfrac{c+d}{2} = r\left[\sin\dfrac{e+f}{2}\cos\dfrac{c+d}{2} + \sin\dfrac{c+d}{2}\cos\dfrac{e+f}{2}\right],$

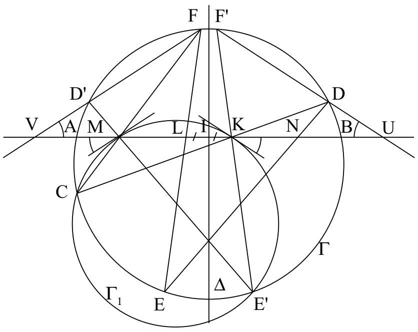
et finalement :

$$\sin\frac{e+f+c-d}{2} + \sin\frac{e+f+d-c}{2} + \sin\frac{c+d+e-f}{2} + \sin\frac{c+d+f-e}{2} = 2r\sin\frac{c+d+e+f}{2}.$$

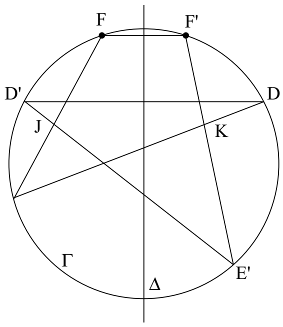
La symétrie des rôles de c, d, e, f dans cette relation prouve que cette dernière est équivalente aux propriétés suivantes :
Les droites (CF) et (DE) coupent(AB) en deux points d'affixes conjugués,
Les droites (CE) et (DF) coupent(AB) en deux points d'affixes conjugués.

Doutant qu'on puisse accéder à cette relation par un pur raisonnement, on peut cependant noter l'intérêt qu'il y aurait à introduire les symétriques de C, D, E, F par rapport à la médiatrice de $[AB]$. Le souvenir d'une figure intervenant dans le problème de Castillon suggère alors ce qui suit.

Solution IV (Inversions) : Soit Γ le cercle donné dans l'énoncé, Δ la médiatrice de $[AB]$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{M}$ les inversions de pôles respectifs K et M et préservant Γ. Soit $U = \mathcal{K}(M)$, $V = \mathcal{M}(K)$.
Prenant I comme origine sur (AB) on note ω, u, v, k, m les abscisses respectives de A, U, V, K, M.
De $(u-k)(m-k) = k^2 - \omega^2$ et $m^2 - \omega^2 = (v-m)(k-m)$ on déduit :
$u(m-k) = km - \omega^2 = v(k-m)$, $u = -v$, U et V sont symétriques par rapport à Δ.
Soit Γ_1 le cercle circonscrit à CKM qui recoupe Γ en E', $D' = \mathcal{M}(E') \in \Gamma$, $F' = \mathcal{K}(E') \in \Gamma$.
Les points F', D, U sont alignés sur $\mathcal{K}(\Gamma_1)$ et les points F, D', V sont alignés sur $\mathcal{M}(\Gamma_1)$.
Les directions des tangentes à Γ_1 en K et M d'une part, les points U et V d'autre part étant symétriques par rapport à Δ il en est de même des droites $(F'D)$ et (FD') donc aussi de leurs intersections avec Γ qui sont $\{F', D\}$ et $\{F, D'\}$. La droite (DF) n'étant pas perpendiculaire à Δ d'après la figure de l'énoncé, le symétrique de F est F' et D' est celui de D.
Sachant par hypothèse la symétrie de K et L les droites $(F'K)$ et (FL) recoupent Γ en les deux points E' et E symétriques par rapport à Δ ; il en est donc ainsi de $(D'E')$ et de (DE) qui coupent (AB) en M et N et I est bien le milieu de $[MN]$. On fait de même pour $[PQ]$.



Solution IV



Solution V

Cette démonstration vient de mettre en valeur les cordes perpendiculaires à Δ qui sont parallèles entre elles. D'où l'idée d'utiliser le théorème de Pascal.

Solution V (Pascal) : Désormais on note C', D', E', F' les symétriques de C, D, E, F par rapport à Δ. D'après la figure de l'énoncé aucune des cordes étudiées n'est parallèle à (AB). Parmi les points C, D, E, F, D', E', F' les égalités $D = D', E = E', F = F'$ sont les seules possibles. Si par exemple F est identique à F' alors (FF') désignera la tangente en F au cercle Γ laquelle est aussi parallèle à (AB).
Considérons l'hexagone $FF'E'D'DC$. Les droites (FF') et $(D'D)$ sont parallèles à (AB), $(F'E')$ et (DC) se coupent en $K \in (AB)$, donc le point J d'intersection de $(E'D')$ et (CF) appartient aussi à (AB) d'après le théorème de Pascal. Ce point est donc identique à M. Les droites (ED) et $(E'D')$ coupent (AB) en deux points N et M qui sont bien symétriques par rapport à I. On procède de manière analogue pour P et Q.

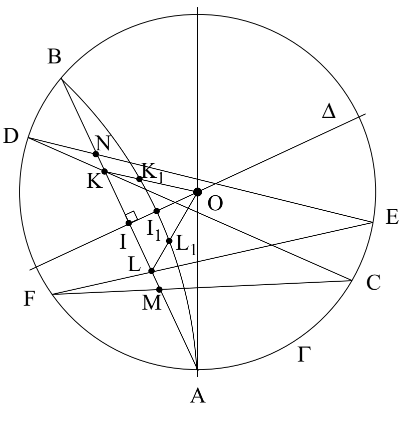
On sait que pour le cercle il existe des démonstrations élémentaires du théorème de Pascal (a fortiori dans le cas particulier qui vient d'être envisagé). Aussi il semble que les éléments d'une telle démonstration pour notre exercice soient enfin accessibles. Ce qui suit le confirme grâce aux seuls angles orientés de droites.

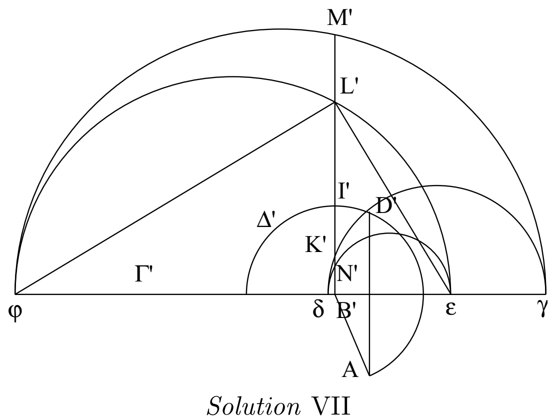
Solution VI (élémentaire mais non évidente) : Par cocyclicité et symétrie des arcs orientés $\overset{\frown}{DF}$ et $\overset{\frown}{F'D'}$ on a : $(CD, CF) = (E'F', E'D')$ ou encore si J est comme ci-dessus, $(CK, CJ) = (E'K, E'J)$,
d'où l'on déduit $(KJ, KE') = (CJ, CE') = (CF, CE')$ qui par cocyclicité vaut $(F'F, F'E')$.
Le parallélisme de (KJ) et de (FF') permet alors de conclure comme plus haut.

Sous le regard menacant du sphinx le moment est alors venu de me conformer à la règle du petit tailleur et de construire une 7ème démonstration. Pour naturelle qu'elle fût à la seule vue de la figure l'idée de faire intervenir la géométrie hyperbolique ne pouvait a priori donner aucune certitude de résolution rapide. C'est pourtant ce qui eut lieu.

Solution VII (Géométrie hyperbolique) : Sur la figure
- I_1, K_1, L_1 sont les points d'intersection de $(OI), (OK), (OL)$ avec l'arc $\overset{\frown}{AB}$ orthogonal et intérieur à Γ ; l'élaboration du modèle de Beltrami de la géométrie hyperbolique montre que le cercle circonscrit à CK_1D est orthogonal à Γ et de même pour EL_1F.
- B', I', K', L', Γ' sont les images de B, I_1, K_1, L_1, Γ par l'inversion de pôle A et de puissance AO^2.
- Sur la droite Γ' on prend B' comme origine et $\gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ sont les abscisses des inverses de C, D, E, F.
Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :
$IK = IL$, K_1 et L_1 sont symétriques par rapport à Δ, $\dfrac{K_1B}{I_1B} \div \dfrac{K_1A}{I_1A} = \left[\dfrac{L_1B}{I_1B} \div \dfrac{L_1A}{I_1A}\right]^{-1}$, $\dfrac{K'B'}{I'B'} = \dfrac{I'B'}{L'B'}$.

Or sachant $(K'B')^2 = -\gamma\delta$ et $(L'B')^2 = -\varepsilon\varphi$ (triangles rectangles) la dernière relation est équivalente à $(I'B')^4 = \gamma\delta\varepsilon\varphi$, relation symétrique en $\gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ et qui équivaut donc à $IM = IN$.





Solution VII

Il s'agit là d'une démonstration de "saltimbanques" diront certains puisque le cas du segment $[PQ]$ n'a pu être étudié. Mais cette qualification a aussi ses côtés positifs : la magie de l'inversion, pilote du voyage de Beltrami à Poincaré et la simplicité "biblique" du dernier argument qui donnent à cette démonstration un charme insurpassable à mes yeux.