Baccalauréat C Sud-Viêt-Nam juin 1973

EXERCICE 1

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation

$$z^2 - 5z + (8 - 6\text{i}) = 0.$$

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé, soit I le point de coordonnées (1 ; 0) et J le point de coordonnées (0 ; 1).
H_1 désigne l'homothétie de centre I et de rapport −2.
k désignant un nombre réel strictement positif, soit H_2 l'homothétie de centre J et de rapport k.
Déterminer la nature et les éléments de la transformation $H_2 \circ H_1$ composée des deux homothéties H_1 et H_2 suivant les valeurs de k.

PROBLÈME

Partie A

Soit $(\mathscr{A},\ +,\ .)$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la loi interne, notée +, définie par

$$(\forall f \in \mathscr{A}),\ (\forall g \in \mathscr{A}), (\forall x \in \mathbb{R}) : (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

et pour la loi externe, notée ., définie par

$$(\forall f \in \mathscr{A}), (\forall \lambda \in \mathbb{R}), (\forall x \in \mathbb{R}) : (\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

1. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les ensembles des applications respectivement paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que les lois définies dans $\mathscr{A}$ munissent les parties $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$ d'une structure d'espace vectoriel réel.
2. Déterminer $\mathscr{P} \cap \mathscr{I}$, intersection des ensembles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$.
3. Soit F un élément quelconque de $\mathscr{A}$. On considère les deux éléments p_F et i_F de $\mathscr{A}$ définis par

   $$(\forall x \in \mathbb{R}) : p_F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)].$$

   et

   $$i_F(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)].$$

   Démontrer que PF E J et que iF E .7 ; en déduire que d est somme directe de J et de :/.

Partie B

c : x 2(e :x+e-X) R-R s : x 21(e :x-e-X).
B) Dans cette question, on considère le cas particulier où F est la fonction exponentielle de base e et l'on désigne par c et s les deux applications p_F et i_F associées à F.

1. Étudier les variations des fonctions R R et et

2. Déterminer Iim (C(X) - 21 e :) X +QO lim (S(X) - !e : $x).X +QO2 Tracer sur un même graphique les courbes$ (C) et (8) d'é
$y = c(x) et Déduire du B, l'existence d'une application,$ s^{-1}, réciproque de s.
(S) : y = s(x). Déterminer $s^{-1}(a)$. Pour cela, on pourra résoudre l'équation

$$(x \in \mathbb{R}) : \quad s(x) = a.$$

On aura intérêt à effectuer le changement d'inconnue défini par $\text{e}^x = u$.

3. Soit D(λ) le domaine plan délimité par (C), (S) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$.
Déterminer l'aire du domaine D(λ) .

Partie C

Soit M un point mobile du plan euclidien rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ orthonormé.
À chaque instant t, les coordonnées de M sont définies par

$$t > 0, \quad x = c(t), \quad y = s(t).$$

1. Déterminer la trajectoire du mobile M.
2. Soit $V(t)$ la vitesse de M à l'instant t. Déterminer l'ensemble (H) des points m du plan tels que, à chaque instant, on ait $\overrightarrow{\text{O}m} = \overrightarrow{\text{V}(t)}$.
3. Déterminer la nature du mouvement de M sur la trajectoire.