

Construction d'une courbe de Bézier quadratique

I) Activités préparatoires

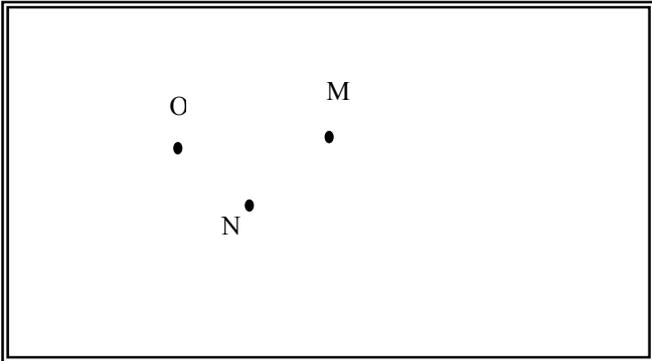
Cours

Définition d'une homothétie de centre O et de rapport k (où $k \in \mathbb{R}$)

Une homothétie est une fonction définie sur les points du plan. (comme la translation). Précisément,

$$M' \text{ est l'image de } M \text{ par une homothétie de centre } O \text{ et de rapport } k \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

Dans le cadre ci-contre, dessinez les images M' de M et N' de N par l'homothétie de centre O et de rapport 2 ($k = 2$)



Rappel pour mémoire d'une translation :

$$M' \text{ est l'image de } M \text{ par une translation de vecteur } \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Signification géométrique

L'image d'un figure par une translation est un figure isométrique à son antécédent.

L'image d'un figure par une homothétie est un figure semblable à son antécédent.

I) Construction de l'image A'B'C' d'un triangle ABC par une homothétie

Lancez le logiciel Cabri, puis *Enregistrer* > *Home* > *Math*. Ouvrez-le et enregistrez sous le nom « Homothétie »

Cliquez sur *Point* et placez les points A, B, C et O dans le plan.

Cliquez sur *Nombre* et tapez le nombre 2

Cliquez sur *Homothétie* pour construire les points A', B' et C' images respectives de A, B, C par l'homothétie de centre O et de rapport 2 (**aide : la touche F1**)

Formez les deux triangles ;

Déplacez les points et observez que les triangles ABC et A'B'C' sont toujours semblables.

Cliquez sur le nombre 2 et modifiez sa valeur. Observez.

Avez-vous remarqué une particularité entre ces deux triangles semblables ? Laquelle ?

.....

.....

Sauvegardez (ctrl S).

II) Courbes de Béziers quadratique

Définition (inutile pour cette activité, mais nous l'appliquerons plus tard)

La courbe de Bézier quadratique de trois points non alignés A, B, C et le lieu des barycentres M des points pondérés (A, t^2) , $(C, 2t(1-t))$ et $(B, (1-t)^2)$, pour $t \in [0, 1]$

(On dit quadratique, car les coefficients en t sont des polynômes de degré 2)

II,1) Construction d'un nombre compris entre 0 et 1

Fichier > Nouveau > Enregistrez sous le nom « Bézier »

Dessinez un segment [OI] ; cliquez sur *Point sur un objet* et placez un point T sur ce segment

Cliquez sur *Distance et Longueur* et mesurez les distances OI et OT

Cliquez sur *Calculatrice* et calculez OT/OI . Cliquez sur le résultat et maintenez appuyé le bouton gauche. Déplacez-vous sur une zone vide de l'écran ; relâchez. Fermez la calculatrice puis, Double-cliquez sur « Résultat » et remplacez ce mot par « t = »

Faites apparaître la valeur 1 - t.

Déplacez le point T et vérifiez que $t \in [0, 1]$ (Est-ce toujours vrai quand on déplace O ou I ?)

II,2) Construction du barycentre X de (A , t) et (C , 1-t)

Utilisation des homothéties pour construire un barycentre

Explications : X bary de (A , t) et (C , 1-t) \Leftrightarrow Pour tout M, $(t + 1 - t)\overrightarrow{MX} = t\overrightarrow{MA} + (1 - t)\overrightarrow{MC}$
 \Leftrightarrow Pour tout M, $\overrightarrow{MX} = t\overrightarrow{MA} + (1 - t)\overrightarrow{MC}$

En particulier pour M = A, $\overrightarrow{AX} = (1 - t)\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ X est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 1 - t

Application : Cliquez sur *Homothétie* pour construire X (aide : F1)

Construction du barycentre Y de (C , t) et (B , 1 - t) (à vous de jouer)

Construction du barycentre M de (X , t) et (Y , 1 - t) (à vous de jouer)

Cliquez sur *Lieu* et tracez le lieu du point M en fonction du point T (aide : F1)

« Le segment de parabole (AMB) est la courbe représentative de la fonction $t \rightarrow M(t)$ pour $t \in [0 ; 1]$; pour nous, c'est aussi la trajectoire(ou le lieu) suivie par M quand le point T parcourt le segment [OI]. On lui donne le nom de **courbe de Bézier des points pondérés** (A, t^2) , $(C, 2t(1-t))$, $(B, (1-t)^2)$ où C est le point de contrôle. »

(Vous pouvez déplacer les points A, B ,C et T)

Que peut-on observer entre le triangle ABC et la courbe (AMB) ?

.....

Que représente le segment [XY] pour le lieu (AMB) ?

.....

Tracez le lieu du point N, barycentre de (X , 1 - t) et (Y , t).

Cliquez sur *Milieu* et placez le milieu I du segment [AB]

Les points C, N et I sont-ils alignés ? Pour toutes les valeurs de t ?

.....

III) Courbes de Bézier cubiques

Enregistrez la feuille sous un nouveau nom : « Bézier cubique ».

Supprimez le triangle ABC mais conservez le segment [OI]

Dessinez un quadrilatère ACDB

Dans le triangle ACD, construisez le barycentre X de (A, t) et (C, 1-t) puis le barycentre Y de (C, t) et (D, 1-t) et enfin, le barycentre M de (X, t) et (Y, 1-t).

Dans le triangle CDB, construisez le barycentre Z de (D, t) et (B, 1-t) puis le barycentre N de (Y, t) et (Z, 1-t)

Construisez le barycentre J de (M, t) et (N, 1-t)

Cliquez sur *Lieu* et tracez le lieu du point J en fonction de T (aide : F1)

Échangez les places des points C et D. Observez (vous pouvez faire des boucles)

Le lieu (AJB) du point J n'est plus une parabole. C'est la **courbe de Bézier cubique des points pondérés** (A, t³), (C, 3t²(1-t)), (C, 3t(1-t)³), (B, (1-t)³). Il possède deux points de contrôle C et D permettant d'obtenir des courbes plus faciles à ajuster et plus générales que la parabole (on peut faire des boucles).

Que peut-on observer en A et B ?

.....

IV) Raccord de deux courbes de Bézier

EnregistrezSous> enregistrez la feuille sous le nom : « BézierRaccord ».

Supprimez le quadrilatère ACDB mais conservez le segment [OI]

Dessinez deux triangles ABC et BDE

Construisez la courbe de Bézier de ABC avec C comme point de contrôle (comme la première fois)

Rappel : cette courbe est le lieu des barycentres (A, t²), (C, 2t(1-t)), (B, (1-t)²), où t ∈ [0, 1]

Construisez la courbe de Béziérs relative au triangle BDE, D étant le point de contrôle.

Cette courbe est le lieu des barycentres de (B, t²), (D, 2t(1-t)), (E, (1-t)²), où t ∈ [0, 1]

Comment placer les points A, B, C, D, E pour que les courbes ne présentent aucune cassure en B ?

.....

IV,1) Application pratique

On veut reproduire la lettre S ci-dessous en utilisant des courbes de Bézier quadratiques. Sur la figure, placez les points qui permettent cette construction (on la réalisera la prochaine fois sur Géoplan)



V) Reproduction de la lettre S en utilisant des courbes de Bézier (quadratiques)

Définition et principe de la construction

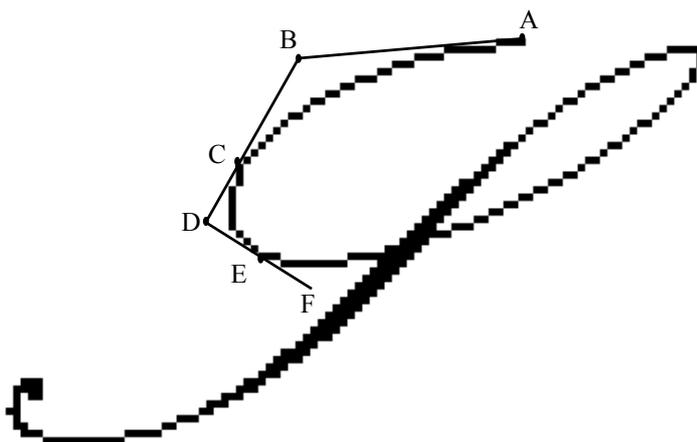
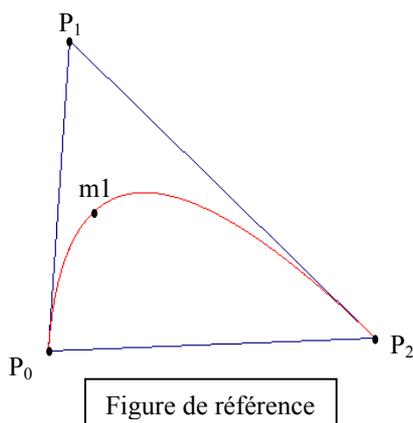
La courbe de Bézier quadratique de trois points non alignés P_0, P_1, P_2 et le lieu des barycentres m des points pondérés $(P_0, t^2), (P_1, 2t(1-t))$ et $(P_2, (1-t)^2)$, pour $t \in [0, 1]$

Propriétés géométriques d'une courbe de Bézier (quadratique).

Une courbe de Bézier est un segment de parabole (c'est le lieu de m , quand t varie entre 0 et 1)
 Les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) sont des tangentes à cette parabole respectivement en P_0 et P_2 .
 Les tangentes (P_0P_1) et (P_2P_1) se rencontrent en P_1 .

Explication de la figure de référence

Les extrémités du segment de parabole s'appellent **les points de passage** (de la courbe de Bézier). On les note P_0 et P_2 sur la figure de référence (A, C, E, etc. sur la lettre S). Le point de rencontre des tangentes s'appellent **le points de contrôle** (de la courbe de Bézier). On le note P_1 sur la courbe de référence (B, D, F, etc. sur la lettre S)



A la main, finissez de décomposer la lettre S en segments de parabole. Conservez l'ordre alphabétique et recopiez aussitôt les noms dans le tableau.

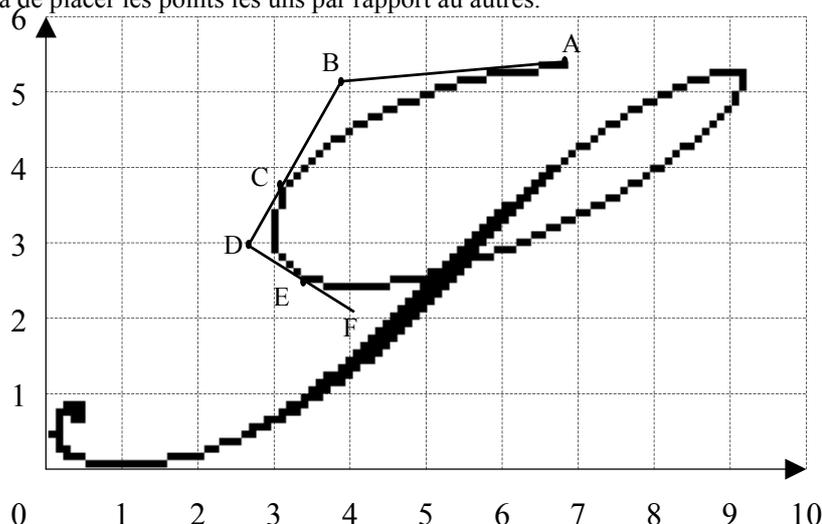
Points de passage : (P_0, t^2)	A	C	E						
Points de contrôle : $(P_1, 2t(1-t))$	B	D	F						
Points de passage : $(P_2, (1-t)^2)$	C	E							
Points générant la courbe de Bézier	m1	m2	m3						

Observez qu'à l'exception du premier et du dernier, les points de passage apparaissent deux fois dans le tableau. Sur le dessin, ils sont alignés avec les points de contrôle qui les encadrent. Ainsi une tangente est-elle commune à deux paraboles et les courbes se raccorderont donc sans cassure. Les points m_1, m_2 , etc. n'apparaissent pas sur la figure, mais vous en aurez besoin pour la construction sous Géoplan.

VI) Construction sous Géoplan de la lettre S

Lancer le logiciel Géoplan.

Le repère vous permettra de placer les points les uns par rapport aux autres.



Création et affichage de la variable $t \in [0, 1]$

Créer, Numérique, Variable réelle libre dans un intervalle : l'intervalle $[0 ; 1]$ et la variable t .

Créer, Affichage, Variable numérique déjà définie : la variable t avec 2 décimales.

Piloter, Modifier paramètre de pilotage au clavier, pas de pilotage : 0,01

Piloter, Piloter au clavier : choisir t . En appuyant sur les flèches  , faites varier les valeurs de t .

Affichage des points de passage et de contrôle

Si vous ne l'avez pas fait, remplissez le tableau en bas de la feuille 4

Créer, Point libre, dans le plan : créez le point A, tous les **points de contrôle** et le dernier point du dessin.

Sélectionner le repère  (Vous pouvez déplacer le repère en maintenant enfoncé le bouton droit de la souris).

Styles, quadrillage dans un repère puis cliquez sur un axe du repère ; *axe gradué* puis cliquez sur un axe du repère)

Il vous reste à déplacer les points (bouton gauche de la souris) aux endroits indiqués par le dessin sur la feuille.

Créer, Point libre, sur un segment : Créez les **points de passage** situés entre deux points de contrôle. Déplacez-les aux endroits indiqués par le dessin sur la feuille.

Affichage des barycentres dépendant de t

Créer, Point, barycentre : Créez le point m_1 barycentre de (A, t^2) , $(B, 2t(1-t))$ et $(C, (1-t)^2)$

Astuce : Copiez le contenu de la fenêtre (ctrl C) : (A, t^2) $(B, 2t(1-t))$ $(C, (1-t)^2)$

Recommencez pour m_2 etc. , en recopiant (ctrl V) le contenu de la fenêtre précédente.

Tracé de la lettre S

Afficher, Sélection trace : sélectionnez les points m_1, m_2 , etc.

Afficher, Mode trace (bascule).

En faisant varier les valeurs de t , vous devez voir la lettre se construire à l'écran.

Quittez le mode trace : *Afficher Mode trace*(bascule)

Le mode trace ne permet pas de modifier l'emplacement des points pour corriger le dessin. En revanche, vous aurez cette possibilité avec la commande *Lieu*.

Affichage du lieu des barycentres en fonction de t

Créer, Ligne courbe, Lieu d'un point : le pilote est t , les points sont m_1, m_2 , etc., et les noms c_1, c_2 , etc.

Quand le dessin est terminé, agissez sur les points de contrôle pour affiner la forme de la lettre S

VI) Construction sous Geogebra de la lettre S

Lancer le logiciel Geogebra. *Fichier > Enregistrez* sous le nom « Dessiner un S » dans votre dossier Math.

Dans le repère ci-contre, Placez les points de contrôle et les points de passage.

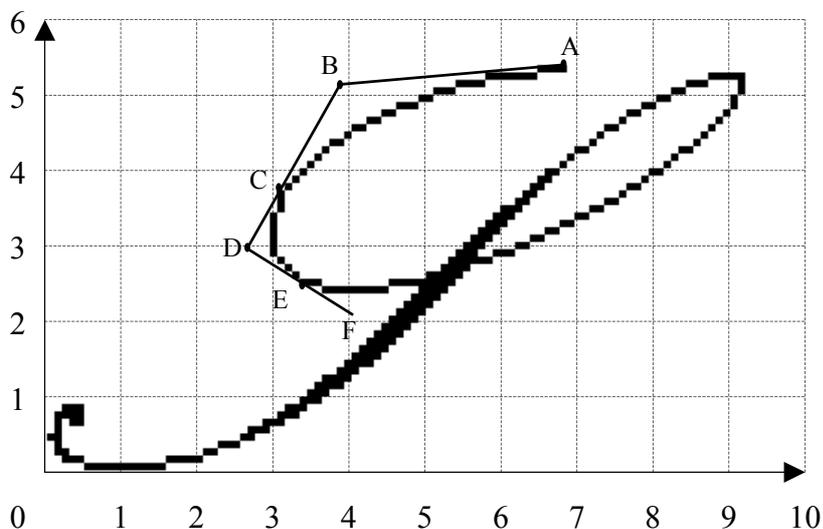
Si vous ne l'avez pas fait, **remplissez** le tableau en bas de la feuille 4

Affichage des points de passage et de contrôle

Affichage > Grille. Puis, Option > Étiquetage > Pas les nouveaux objets

Choisir  > placez le premier point et tapez aussitôt A pour le nommer. (vous pouvez aussi faire un clic droit sur le point et choisir Renommer)

Ne placez pas encore les autres points de passage mais placez tous les points de contrôle en les nommant au fur et à mesure. Placez le dernier point.



Choisir  > reliez tous les points précédents par un segment comme sur la figure ci-dessus

Choisir  > créez les **points de passage** situés entre deux points de contrôle.

Choisir l'icône *Déplacer*  > positionnez précisément les points de passages.

Création et affichage de la variable $t \in [0, 1]$

Comme sous Cabri créez un segment [OI], puis placez-y un point T.

Dans la fenêtre *Saisie* > $t = \text{Distance}[O,T]/\text{Distance}[O,I]$ > validez

Choisir  > déplacez T pour vérifier votre construction.

Affichage des barycentres dépendant de t

Création du point P1 , barycentre de (A, t^2) , $(B, 2t(1-t))$ et $(C, (1-t)^2)$

Dans la fenêtre *Saisie* > $P1 = t^2 A + 2t(1-t) B + (1-t)^2 C$ (c'est la notation vectorielle anglo-saxonne : elle représente $OP1 = t^2 OA + \dots$) > Copier le contenu de la fenêtre *Saisie* > validez.

Fenêtre *Saisie* > Coller > créez le point P2 , barycentre de (C, t^2) , $(D, 2t(1-t))$ et $(E, (1-t)^2)$

Etc., jusqu'au dernier barycentre.

Tracé de la lettre S

Clic droit sur un barycentre > Choisissez *Trace activée*. Recommencez pour tous les autres barycentres.

Choisir  > Sélectionnez le point T dans la fenêtre *Objets Libres*  Objets dépendants

Actionnez l'une des flèches du clavier   , pour faire varier T.

Pour quitter le mode *Trace activée*, : *Affichage > Rafraîchir l'image* > clic droit sur les barycentres et désélectionnez *Trace activée*

L'ajustement du dessin n'est pas possible en mode trace, il faut se donner un lieu de points.

Affichage du lieu des barycentres en fonction de t

Choisir l'icône *Lieu*  > Cliquez sur un barycentre puis sur le point T . Recommencez avec les autres barycentres. Vous pouvez agir sur les points de contrôle pour affiner la forme de la lettre S