Utilisation d'un tableur pour obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$

(un algorithme est une suite d'instructions qui permet de résoudre un problème. En cuisine, on dit une recette)

I) Algorithme de Noé (Si vieux qu'il pourrait bien remonter au Déluge)

Dans cette activité, l'algorithme de Noé consiste à prendre le centre d'un encadrement connu de $\sqrt{2}$ afin d'en obtenir un encadrement plus précis.

Partons, par exemple, de $1 < \sqrt{2} < 2$. Le centre 1,5, qui est entre 1 et 2, est donc plus proche de $\sqrt{2}$. En testant son carré, nous pouvons savoir s'il en est plus proche par défaut, auquel cas il remplace 1, ou plus proche par excès, auquel cas il remplace 2. Dans cet exemple, on a obtenu $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Maintenant, faisons travailler le tableur.

	A	B	C	D	E
1	Valeur par défaut	Valeur exacte	valeur par excès	Valeur approchée	Test
2	1	< racine(2) <	2		
3					
4					

Ouvrir une Feuille Excel. <u>Faites</u> : *Enregistrer* > *Home* > puis créez un dossier math, ouvrez-le et tapez le nom "algorithme e Noé". Taper la feuille ci-dessus.

1) Dans la cellule D2, entrez la formule =(A2 + C2)/2 (tapez le texte ou cliquez sur les cellules concernées) puis Validez. Quel résultat est affiché dans la cellule D2 ?

....

2) Dans la cellule E2 entrez la formule =D2^2 . Quel résultat est affiché dans la cellule E2 ?

....

3) Sélectionnez les colonnes allant de A à E, puis *Format* > *Cellules* > *Nombre* . Choisissez *Nombre* et *Nombre de décimales* : 6 . Validez. Puis *Format* > *Colonne* > *Largeur*. Tapez 11 (la colonne peut contenir 10 chiffres et 1 virgule). Validez. Quel a été le résultat de cette intervention sur les cellules de la ligne 2 ?

....

4) Dans la cellule A3, entrez la formule =SI(E2 > 2; A2 ; D2)

Cette formule teste, en A3, le nombre de la cellule E2. S'il est plus grand que 2 , le nombre de la cellule A2 est recopié en A3. Sinon, c'est le nombre de la cellule D2 qui est copié en A3. Que signifie le Sinon dans la phrase précédente ?

....

5) Dans la cellule C3, entrez la formule =SI(E2 > 2; D2 ; C2) . Que signifie cette formule ?

....

....

....

6) Sélectionnez les cellules D2 et E2 en maintenant le bouton gauche de la souris enfoncé et approchez le pointeur du coin en bas à droite de la cellule E2, jusqu'à voir apparaître la croix **+**. Maintenez le bouton gauche enfoncé et faites glisser la croix vers le bas d'une ligne. Vous venez de réaliser un **copier-glisser**.

Comparez les contenus des cellules D2 , E2 , D3 , E3. Quelle est la conséquence du copier-glisser sur ces cellules ?

....

....

7) Sélectionnez les cellules de A3 à E3, puis faites un copier glisser jusqu'à la ligne 23.

Enregistrer = Ctrl + S

Donnez une interprétation de chacun des nombres placés dans les cellules de A23 à E23

En A23, ...

En C23, ...

En D23, ...

En E23, ...

Apportez les modifications nécessaires pour obtenir le meilleur encadrement de $\sqrt{2}$ avec 12 chiffres après la virgule. (si vous obtenez #####, vous avez oublié la largeur de la colonne)

À quelle ligne obtient cette encadrement ? ....

<u>Supplément</u> : déterminez un encadrement de $\sqrt{3}$ et de $\sqrt{5}$ sur les feuilles 2 et 3

Comparons les algorithmes d'Archimède et de Babylone ($2^{\text{ème}}$ journée)

II) **Algorithme de Héron** (très ancien ; difficile à dater : avant – 1000 ?) (**Héron d'Alexandrie** l'utilisait vers – 100)

Ouvrez le fichier Excel sur l'algorithme de Noé. Avec le bouton droit de la souris, cliquez sur le nom *Feuil1* en bas de page, puis choisissez *Renommer*. Tapez *Noé*.

De même, remplacez le nom *Feuil2* par *Héron*. puis, dans cette feuille, tapez la fenêtre ci-contre.

	A	B	C	D
1	valeur par défaut	valeur exacte	valeur par excès	**annexe** : valeur par excès * valeur par défaut
2		< racine(2) <	2,000000	

L'algorithme de Héron consiste à prendre puis à calculer deux nombres dont le produit vaut 2 pour encadrement de $\sqrt{2}$.
Partons, par exemple, de $1 < \sqrt{2} < 2$. On a bien $1 \times 2 = 2$. Prenons le centre 1,5 , qui est plus grand que $\sqrt{2}$ et plus petit que 2. Calculons ensuite $2 \times \frac{1}{1,5}$, qui est plus grand que 1 est plus petit que $\sqrt{2}$. Nous obtenons $2 \times \frac{1}{1,5} < \sqrt{2} < 1,5$ et cet encadrement plus précis est formé de deux nombres dont le produit $(2 \times \frac{1}{1,5}) \times 1,5$ vaut 2 , puisque $\frac{1}{1,5} \times 1,5 = 1$.

Maintenant, faisons travailler le tableur.

1) Sélectionnez les colonnes de A à C, puis dans *Format de cellules* > *Nombre* > *Nombres de décimales* tapez 6 . Validez, puis demandez une largeur de colonne de 11. Validez.

2) Dans la cellule A2, entrez la formule =2/C2 puis validez.

3) Dans la cellule D2, entrez la formule =A2*C2 puis validez. (Cette colonne n'est pas utile à l'algorithme mais elle vous aidera à en comprendre le fonctionnement)

4) Dans la cellule C3, entrez la formule =(A2 + C2)/2 puis validez.

5) Dans la cellule A3, entrez la formule =2/C3 puis validez.

6) Sélectionnez les cellules de A3 à D3, puis faites un copier glisser jusqu'à la ligne 10.

7) Comparez l'encadrement de $\sqrt{2}$ obtenu par les algorithmes d'Archimède et de Babylone.

Enregistrer maintenant

Ctrl + S

Lequel vous paraît le plus rapide ? Le plus simple ?

....

....

8) Apportez les modifications nécessaires pour obtenir le meilleur encadrement de $\sqrt{2}$ avec 12 chiffres après la virgule.

À quelle ligne obtient-on cet encadrement ? ....

Une nouvelle fois comparez les deux algorithmes ?

....

....

Restez dans un affichage à 12 chiffres décimaux. Déterminez un encadrement de $\sqrt{3}$ puis de $\sqrt{5}$. **Mais attention** : pour $\sqrt{3}$ la colonne D doit produire des 3 et pour $\sqrt{5}$, elle doit produire des 5. Pour cela vous devez modifier la formule écrite en A2. Quelle est cette modification ?

....

Dans chaque cas, comparez l'efficacité des deux algorithmes.

....

....

Projetons-nous au temps d'Archimède. Les calculatrices et les ordinateurs ne sont pas inventés et tous les calculs se font à la main, comme à l'école primaire. Dans cette situation, il est préférable de choisir l'algorithme d'Archimède. Pourquoi ?

....

....

Si vous avez terminé, demandez au professeur de vous orienter sur le logiciel SAMAO 2^{nde} . À l'intérieur du menu *Nombre*, vous choisirez A1 , B1 ou C1 selon la leçon que vous souhaitez revoir. Entraînez-vous, ensuite, à faire les exercices correspondants.

DNS 3

À rendre pour le jeudi 8 novembre

I) **Application des algorithmes de Noé et de Héron à l'encadrement de $\sqrt{2}$**

1) Complétez jusqu'au rang 6 , les tableaux suivants en écrivant les encadrements sous la forme d'une **fraction irréductible :**

Algorithme de Noé					
Rang	Valeur par défaut	Valeur exacte	Valeur par excès	Valeur approchée	Test
1	1	$<\sqrt{2}<$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}>2$
2	**1**	$<\sqrt{2}<$	$\frac{3}{2}$		
3					
4					
5					
6					

Algorithme de Héron			
Rang	Valeur par défaut	Valeur exacte	Valeur par excès
1	1	$<\sqrt{2}<$	2
2	$\frac{4}{3}$	$<\sqrt{2}<$	$\frac{3}{2}$
3			
4			
5			
6			

2) À la ligne n° 6, lequel des encadrements vous paraît le plus précis. Justifiez.

....

....

Activité à faire en classe après la séance informatique

Algorithme d'Archimède

L'algorithme d'Archimède fonctionne un peu comme l'algorithme de Noé et se prête bien à un calcul sur les fractions : Archimède, je vous le rappelle, ne connaissait pas les nombres décimaux. Son algorithme s'appuie sur la propriété suivante :

si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre la plus petite $\frac{a}{b}$ et la plus grande $\frac{c}{d}$.

1) Traduire cette propriété en langage mathématique

....

Dans le cas d'un encadrement de $\sqrt{2}$ par des fractions, comme $\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1}$ alors $\frac{1+2}{1+1}$ est plus proche de $\sqrt{2}$. Il suffit ensuite de procéder comme pour l'Algorithme de Noé afin de savoir si $\frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ en est plus proche par défaut ou par excès.

Dans cet exemple, on obtient $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Démonstration de la propriété (sur le cahier)

2) Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions formées de nombres positifs et telles que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Calculez la différence $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ puis démontrez que, d'une part, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ et que, d'autre part, $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Concluez.

Calcul à la main (sur le cahier)

3) Complétez le tableau suivant jusqu'au rang 6 en écrivant les encadrements sous la forme d'une fraction

Algorithme d'Archimède					
Rang	Valeur par défaut	Valeur exacte	Valeur par excès	Valeur approchée	Test
1	$\frac{1}{1}$	$< \sqrt{2} <$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} > 2$

Programmation du tableur (à faire en classe)

La cellule I2 contient la formule « = H2^2 « . Que calcule cette formule ?

La cellule A3 contient la formule « =SI(I2>2 ;A2 ;H2) » dont la signification en français est « =(Si la valeur de la cellule I2 est plus grande que 2 ; Alors copier la valeur de la cellule A2 dans A3 ; Sinon copier la valeur de la cellule H2 dans A3)

A3 = =SI(I2>2;A2;H2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valeur par défaut	Valeur exacte	Valeur par excès	Numérateur (défaut)	Dénominateur (défaut)	Numérateur (excès)	Dénominateur (excès)	Valeur approchée	Test
2	1,000000	< racine(2) <	2,000000	1	1	2	1	1,500000	2,250000
3	1,000000	< racine(2) <	1,500000	1	1	3	2	1,333333	1,777778

4) Écrivez la formule de la cellule C3 dont la signification en français est « =(Si la valeur de la cellule I2 est plus grande que 2 ; Alors copier la valeur de la cellule H2 dans C3 ; Sinon copier la valeur de la cellule C2 dans C3)

....

Les colonnes de D à G font apparaître les numérateurs et dénominateurs des fractions encadrant $\sqrt{2}$. Par exemple, $\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1}$ donne les cellules de D2 à G2 et $\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ donne les cellules de D3 à G3.

5) Dans la cellules D3, on trouve la formule « = SI(I2 > 2 ; D2 ; D2 + F2). Écrivez les formules des cellules E3 , F3 et G3.

....

6) Dans la cellule H2, quelle formule vous permet d'obtenir la valeur approchée $\frac{1+2}{1+1}$ de l'encadrement $\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1}$?

....

7) Que faire pour obtenir le calcul de la cellule H3 ?

....