

## 2. Limites

**2.1 Limite en l'infini.** " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ " signifie que, pour  $x$  assez grand,  $f(x)$  entre dans tout intervalle  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$  et n'en ressort plus : pour visualiser cette définition, rien de plus facile que de créer un curseur  $\varepsilon$ , trois droites  $y = \ell$ ,  $y = \ell - \varepsilon$ ,  $y = \ell + \varepsilon$  ; on déplacera la plage de travail jusqu'à voir la courbe entrer dans le "tuyau" ; puis grâce au curseur on resserrera ce dernier jusqu'à ce qu'il ne contienne pas la partie visible de la courbe ; on ira alors voir, plus loin, qu'elle finit par y entrer. Voir fichier GeoGebra "Limite en l'infini".

*Je considère comme important, d'un point de vue pédagogique, d'insister lourdement, en utilisant plusieurs fois le déplacement de la feuille de travail et le zoom, pour montrer que la courbe de  $f$  se rapproche toujours plus de la droite  $y = \ell$ , sans pour autant se confondre avec elle : c'est un moyen, à mon avis, de faire naître chez nos élèves le concept d'"infini potentiel" (à défaut de l'infini actuel, dont les mathématiciens se sont passés pendant deux millénaires...)*

**2.2. Limite en un point.** On procèdera de la même façon ; je pense que pour être parlant, l'exemple choisi doit concerner une fonction assez irrégulière et tendant lentement vers  $\ell$  ; sur le fichier "Limite en un point", j'ai pris  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{10}{x}\right)$

### 2.3. Limite infinie (ajout - ne figure pas sur le CD)

Soit par exemple à convaincre les élèves que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Taper  $f(x) = \ln(x)$  ; créer un curseur  $k$  (par exemple : min : 0, max : 100, pas : 1) ; taper  $y = k$  ; choisir des couleurs différentes pour  $f$  et la droite.

Si  $k = 2$ , la courbe passe au-dessus de la droite, c'est clair.

Si  $k = 5$ , on déplace la feuille de travail : le croisement a lieu autour de  $x = 148$

Si  $k = 10$  : zoom arrière, déplacements... On peut croire avoir trouvé un majorant ! Le croisement a lieu vers  $x = 22000$ ... Après un très fort zoom arrière pour aller au-delà de 22000, il faut un très fort zoom avant pour vérifier que la courbe est bien passée au-dessus de la droite !

Si  $k = 50$  : le zoom permis par le logiciel est limité, on n'atteindra pas le croisement ...