

2. Limites

2.1 Limite en l'infini. " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ " signifie que, pour x assez grand, $f(x)$ entre dans tout intervalle $] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$ et n'en ressort plus : pour visualiser cette définition, rien de plus facile que de créer un curseur ε , trois droites $y = \ell$, $y = \ell - \varepsilon$, $y = \ell + \varepsilon$; on déplacera la plage de travail jusqu'à voir la courbe entrer dans le "tuyau" ; puis grâce au curseur on resserrera ce dernier jusqu'à ce qu'il ne contienne pas la partie visible de la courbe ; on ira alors voir, plus loin, qu'elle finit par y entrer. Voir fichier GeoGebra "Limite en l'infini".

Je considère comme important, d'un point de vue pédagogique, d'insister lourdement, en utilisant plusieurs fois le déplacement de la feuille de travail et le zoom, pour montrer que la courbe de f se rapproche toujours plus de la droite $y = \ell$, sans pour autant se confondre avec elle : c'est un moyen, à mon avis, de faire naître chez nos élèves le concept d'"infini potentiel" (à défaut de l'infini actuel, dont les mathématiciens se sont passés pendant deux millénaires...)

2.2. Limite en un point. On procèdera de la même façon ; je pense que pour être parlant, l'exemple choisi doit concerner une fonction assez irrégulière et tendant lentement vers ℓ ; sur le fichier "Limite en un point", j'ai pris $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{10}{x}\right)$

2.3. Limite infinie (ajout - ne figure pas sur le CD)

Soit par exemple à convaincre les élèves que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Taper $f(x) = \ln(x)$; créer un curseur k (par exemple : min : 0, max : 100, pas : 1) ; taper $y=k$; choisir des couleurs différentes pour f et la droite.

Si $k = 2$, la courbe passe au-dessus de la droite, c'est clair.

Si $k = 5$, on déplace la feuille de travail : le croisement a lieu autour de $x = 148$

Si $k = 10$: zoom arrière, déplacements... On peut croire avoir trouvé un majorant ! Le croisement a lieu vers $x = 22000$... Après un très fort zoom arrière pour aller au-delà de 22000, il faut un très fort zoom avant pour vérifier que la courbe est bien passée au-dessus de la droite !

Si $k = 50$: le zoom permis par le logiciel est limité, on n'atteindra pas le croisement ...