

# CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES - SESSION 2003

Le problème étudie des configurations du plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé,  $i$  étant l'affixe du point de coordonnées  $(0, 1)$ .

On appelle **triangle** tout ensemble de **trois points non alignés** du plan.

## 1 Questions préliminaires

1. Soit  $ABC$  un triangle et  $M$  un point quelconque du plan. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

En déduire que les trois hauteurs du triangle  $ABC$  sont concourantes en un point  $H$  appelé **orthocentre** de ce triangle.

2. Soit  $ABC$  un triangle,  $\Omega$  le centre de son cercle circonscrit et  $H$  le point tel que  $\Omega H = \Omega A + \Omega B + \Omega C$ .  
Démontrer que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

Étant donnée une partie  $X$  du plan, supposée non incluse dans une droite, on note  $\mathcal{H}(X)$  l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à  $X$ .

On dira qu'une partie  $X$  du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si  $\mathcal{H}(X)$  est inclus dans  $X$ , c'est-à-dire si tout orthocentre d'un triangle de points de  $X$  appartient à  $X$ .

## 2 Première partie

- Déterminer les parties orthocentriques à 3 éléments.
- Déterminer les parties orthocentriques à 4 éléments.
- Soit  $X$  un ensemble de quatre points d'un cercle et  $Y = \mathcal{H}(X)$ .
  - Montrer que  $Y$  se déduit de  $X$  par une transformation simple.
  - Déterminer  $\mathcal{H}(Y)$ .
- Soit  $\Gamma$  un cercle de rayon strictement positif; déterminer  $\mathcal{H}(\Gamma)$ .
  - Soit  $D$  un disque de rayon strictement positif; déterminer  $\mathcal{H}(D)$ .

## 3 Deuxième partie

Dans cette partie,  $R$  est un nombre réel strictement positif,  $n$  est un entier au moins égal à 2 et  $X$  est l'ensemble des  $2n$  sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

On considère l'ensemble  $\mathcal{T}$  des triangles dont les sommets appartiennent à  $X$ . On choisit au hasard, avec équiprobabilité, un élément de  $\mathcal{T}$ .

- Quelle est la probabilité de choisir un triangle rectangle?
- Quelle est la probabilité de choisir un triangle dont les trois angles sont aigus?
- On note  $L$  la variable aléatoire qui à tout élément de  $\mathcal{T}$  associe le carré de la distance de  $O$  à son orthocentre. Déterminer, en fonction de  $n$  et  $R$ , l'espérance de la variable aléatoire  $L$ .

## 4 Troisième partie

- Soient  $a, b, c$  trois réels tels que  $a(b - c) \neq 0$  et  $A, B, C$  les points de coordonnées respectives  $(0, a), (b, 0), (c, 0)$ .  
Calculer les coordonnées de l'orthocentre  $D$  du triangle  $ABC$ .
- Soit  $X$  la partie obtenue en prenant la réunion d'une droite  $\Delta$  et d'un point  $M$  n'appartenant pas à  $\Delta$ .  
Déterminer  $\mathcal{H}(X)$ . Montrer que  $\mathcal{H}(X) \cup X$  est une partie orthocentrique.
- Soit  $X$  une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  et contenant au moins trois points de  $(O, \vec{u})$  distincts de  $O$ .
  - Montrer que  $X$  contient au moins trois points de  $(O, \vec{u})$  d'abscisses non nulles et de même signe
  - Montrer que  $X$  contient au moins trois points de  $(O, \vec{u})$  d'abscisses strictement positives.
- Déterminer les parties orthocentriques finies, contenant au plus cinq points et incluses dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$ .
  - Soit  $X$  une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  et contenant au moins six points. Montrer qu'il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  de réels non nuls telles que, pour tout entier  $n$ , les points de coordonnées  $(x_n, 0)$  et  $(x'_n, 0)$  appartiennent à  $X$ , et telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = 0$$

Une partie orthocentrique incluse dans la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$  et contenant au moins six points peut-elle être finie?

## 5 Quatrième partie

L'objectif de cette partie est la construction de parties orthocentriques remarquables.

1. Soit  $k$  un réel non nul et soit  $Y$  l'hyperbole d'équation  $xy = k$ .
  - a. Soient  $A, B, C, D$  quatre points distincts de  $Y$ , d'abscisses respectives  $a, b, c, d$ . Montrer que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont orthogonaux si et seulement si  $abcd = -k^2$ .
  - b. Soient  $A, B, C$  trois points distincts de  $Y$ , d'abscisses respectives  $a, b, c$ . Déterminer l'orthocentre de  $ABC$ .
  - c. Montrer que  $Y$  est orthocentrique.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on considère un entier relatif non nul  $q$  et on note  $X$  l'ensemble d'équation  $x^2 + qxy - y^2 = 1$ .

2. a. Montrer que l'équation  $t^2 - qt - 1$  possède deux racines réelles distinctes. Montrer que ces racines sont irrationnelles.

Dans toute la suite de la quatrième partie, on note  $r$  et  $r'$  ces deux racines et  $s$  la similitude définie par la représentation complexe  $z \mapsto (1 - r i)z$ .

- a. Montrer que  $s(X)$  est une hyperbole, d'équation  $xy = k$ , où  $k$  est un réel à déterminer. En déduire que  $X$  est un ensemble orthocentrique.
2. Soit  $G$  l'ensemble des points de  $X$  à coordonnées entières et  $\Gamma$  l'ensemble des abscisses des éléments de  $s(G)$ .
    - a. Vérifier que  $\Gamma$  est l'ensemble des nombres réels de la forme  $x + ry$ , où  $x$  et  $y$  sont deux entiers tels que  $(x + ry)(x + r'y) = 1$ .
    - b. Montrer que  $-1 \in \Gamma$  ; montrer que  $r^2 \in \Gamma$ .
    - c. Montrer que le produit de deux éléments de  $\Gamma$  est élément de  $\Gamma$  et que l'inverse d'un élément de  $\Gamma$  est élément de  $\Gamma$ . Montrer que  $\Gamma$  possède une infinité d'éléments.
  3. Déduire de ce qui précède que l'ensemble  $G$  des points à coordonnées entières de  $X$  est une partie orthocentrique infinie.

## 6 Cinquième partie

On note  $Y_1$  l'hyperbole d'équation  $xy = 1$  et  $Y_0$  l'ensemble d'équation  $xy = 0$ , c'est-à-dire la réunion des axes  $(O, \vec{u})$  et  $(O, \vec{v})$ .

On admet le résultat suivant :

« Étant donnés quatre points  $A, B, C$  et  $D$  du plan, il existe une similitude  $s$  telle que  $s(A), s(B), s(C)$  et  $s(D)$  appartiennent tous à  $Y_1$  ou bien appartiennent tous à  $Y_0$  ».

Soient  $A_0, B_0, C_0$  et  $D_0$  quatre points, trois à trois non alignés, et soit  $X_0 = \{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ . On définit par récurrence  $X_{n+1} = \mathcal{H}(X_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . On suppose qu'il existe un entier  $n$  strictement positif tel que  $X_n = X_0$  et on note  $m$  le plus petit entier ayant cette propriété.

1. Montrer que  $m = 1$  ou  $m = 2$ .
2. Déterminer les ensembles  $X_0$  tels que  $m = 1$ , puis ceux tels que  $m = 2$ .