

1 Problème 1 : Parties de \mathbb{C} de type S

Une partie \mathcal{A} non vide de \mathbb{C} (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $z_1 \in \mathcal{A}$ et $z_2 \in \mathcal{A}$ le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans \mathcal{A} .

Dans tout le problème \mathcal{A} désigne une partie de \mathbb{C} de type S.

On note $b(\mathcal{A})$ le nombre de nombres complexes z de \mathcal{A} dont le module $|z|$ est inférieur ou égal à 1. On note $b(\mathcal{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

1.1 Quelques exemples simples

- Les ensembles suivants sont des parties de \mathbb{C} de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathcal{A})$:
 - $\mathcal{A} = \{0\}$.
 - $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.
 - $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.
 - $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$.
- Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 0$.
 - Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 3$.
- On note $\overline{\mathcal{A}} = \{\bar{z}, z \in \mathcal{A}\}$, c'est-à-dire la partie de \mathbb{C} constituée des nombres complexes conjugués des éléments de \mathcal{A} . Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est de type S et préciser $b(\overline{\mathcal{A}})$.

1.2 Deux exemples de parties de \mathbb{C} de type S

- On définit le complexe j par $j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, c'est-à-dire la partie de \mathbb{C} constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
 - Calculer $1 + j + j^2$.
 - Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type S.
 - Montrer que $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.
 - On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$). Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type S et déterminer $b(\mathbb{Z}[j]^*)$.
- On définit la partie \mathcal{R} de \mathbb{C} par

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C}, z^2 \in \mathbb{Z}[j]\}$$

Ainsi un nombre complexe z est dans \mathcal{R} si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.

- Montrer que \mathcal{R} est de type S.
- Déterminer $b(\mathcal{R})$.

1.3 À la recherche des valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$

- On suppose qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(\mathcal{A}) = \infty$.
- On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note $\arg(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On suppose de plus que $\arg(a)$ n'est ni un multiple de $\frac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\frac{\pi}{4}$.
 - Montrer que si $\arg(a) \in]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.
 - De même montrer que si $\arg(a) \in]0, \frac{\pi}{6}[$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
 - Montrer que si $\arg(a) \in]-\frac{2\pi}{3}, 0[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
 - Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |a^{2n} + a^{4n}| < 1$.
- On suppose, dans cette question, que $b(\mathcal{A})$ est fini et supérieur ou égal à 2.
 - Montrer qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $|a| = 1$.
 - Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\arg(a)$?
 - En déduire que $b(\mathcal{A}) \leq 17$.
- Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 5$.
- Donner une partie \mathcal{A} de type S telle que $b(\mathcal{A}) = 9$.
- Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathcal{A})$?

2 Problème 2 : C'est probablement bon

2.1 Franck passe un premier examen

Franck doit réussir un examen qui consiste en un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) de dix questions numérotées de 1 à 10. Il doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes*.

Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Franck réussira son premier examen si sa note finale est d'au moins *sept* points.

Franck connaît les bonnes réponses des *six* premières questions. Par contre, pour chacune des quatre questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

- Prouver que si Franck ne répond pas à la question numérotée 9, il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.
- Franck a-t-il intérêt à répondre à la question numérotée 10 ?
- Déterminer, selon la valeur de p , quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

2.2 Franck passe un second examen

Franck passe maintenant un second examen, consistant encore en un Q.C.M, formé cette fois de 50 questions. Les modalités de cet examen sont les mêmes que celles du précédent. Ainsi Franck doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes*. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Cependant, pour réussir cette fois, Franck doit obtenir une note finale d'au moins 25 points. Franck connaît les réponses aux 24 premières questions. Par contre, pour chacune des 26 questions suivantes, il a une probabilité p de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq 26$, on note P_k la probabilité que Franck réussisse son examen en ne répondant qu'aux seules $24 + k$ premières questions.

- 1. Prouver que, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq 13$, on a $P_{2k-1} > P_{2k}$.
- 2. Prouver que, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 12$, on a :

P_{2k+1} = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}

- 3. Démontrer que, pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq 11$, on a :

P_{2k+3} - P_{2k+1} = \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1} (2p-1)

On pourra utiliser librement la formule de Pascal pour $0 < m < n : \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.

- 4. Déterminer, selon la valeur de p , quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

3 Problème 3 : Dans l'espace tout entier

On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers, avec $b \neq 0$. En particulier, la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

L'espace usuel \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point $M(x; y; z)$ de \mathcal{E} est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées x , y et z sont des entiers.

De même, un point $M(x; y)$ du plan \mathcal{P} rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées x et y sont des entiers.

Dans tout le problème, les triangles seront supposés *non aplatis*.

3.1 Quelques résultats préliminaires

- 1. Soit ABC un triangle du plan \mathcal{P} rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et H le pied de sa hauteur issue de A (c'est-à-dire H est le point d'intersection entre la droite (BC) avec la perpendiculaire passant par A).

- a. Prouver que :

\vec{AH} = \vec{AB} + \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BC^2} \times \vec{BC}

- b. En déduire que si A , B et C sont des points entiers du plan \mathcal{P} alors les coordonnées de H sont des nombres rationnels.
- c. Si ABC est un triangle de l'espace \mathcal{E} , les résultats établis aux questions **a.** et **b.** ci-dessus sont-ils encore valables?

- 2. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan \mathcal{P} rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$?
- 3. Soit n un entier naturel. Prouver que si \sqrt{n} est un nombre rationnel alors il existe un entier m tel que $n = m^2$.
- 4. a. Prouver que si x est un entier alors il existe un entier t tel que x^2 soit égal à $8t$ ou à $8t + 1$ ou à $8t + 4$.
b. Prouver que si a, b, c et d sont des entiers tels que $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, alors $a = b = c = d = 0$.

3.2 Étude des triangles de l'espace \mathcal{E} à sommets entiers

On rappelle que si θ est la mesure en radian d'un angle non droit d'un triangle (non aplati), on a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Un entier $k \geq 1$ est dit *sans facteur carré*, si $k = 1$ ou s'il peut se décomposer en un produit de nombres premiers deux à deux distincts.

- 1. Donner un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers de l'espace \mathcal{E} .
- 2. Soit T un triangle dont les trois sommets sont des points entiers de l'espace \mathcal{E} .
 - a. Prouver que, pour tout angle θ non droit de T , le nombre $\tan^2(\theta)$ est rationnel.
 - b. Prouver qu'il existe un unique entier $k \geq 1$, sans facteur carré, tel que pour tout angle θ non droit de T , le nombre $\tan(\theta)$ puisse s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.
 - c. En utilisant la question 1. de la partie 1, prouver qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système :

E(3, k) \left\{ \begin{array}{l} k(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0 \end{array} \right.

(Remarque : L'entier k est celui trouvé à la question 2.b.)

3. Soit k un entier strictement positif et sans facteur carré. On suppose qu'il existe des entiers a_1, a_2, a_3, u_1, u_2 et u_3 non tous nuls vérifiant le système $E(3, k)$.
Soit T un triangle de l'espace \mathcal{E} . On suppose que, pour tout angle θ non droit de T , le nombre $\tan(\theta)$ peut s'écrire sous la forme $r\sqrt{k}$, où r est un nombre rationnel non nul.
Montrer qu'il existe un triangle dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T .
4. a. Soit T un triangle isocèle de l'espace \mathcal{E} dont les côtés sont de longueurs 3, 3 et 2.
Existe-t-il un triangle de l'espace \mathcal{E} dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?
- b. Soit T un triangle isocèle de l'espace \mathcal{E} dont les côtés sont de longueurs 2, 2 et 3.
Existe-t-il un triangle de l'espace \mathcal{E} dont les trois sommets sont entiers et ayant les mêmes angles que T ?

Remarque : On pourra librement utiliser l'identité suivante, valable pour tous réels a, b, c, d, e et f :

$$(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) - (ad + be + cf)^2 = (ae - bd)^2 + (af - cd)^2 + (bf - ce)^2$$